A. hydr.
50
k

A. hydr. 50 k

Laisste

Lay.
+ Natanael
+ Schuller

Eingabau am 7. März.

<36633742440015

<36633742440015

Bayer. Staatsbibliothek

Der

Bau der Brückenträger.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

A. hydr. 50 k

DER

BAU DER BRÜCKENTRÄGER

mit

wissenschaftlicher Begründung

der gegebenen Regeln

und

mit besonderer Rücksicht auf die neuesten Ausführungen

von

Fr. Laissle und **Ad. Schübler,**

K. württemb. Eisenbahn-Bauinspectoren.

Bayerische Staats... München

Zweite umgearbeitete Auflage.

Stuttgart.

Verlag von Paul Neff.

1864.

37 - Hyg.

BIBLIOTHECA
Bayerische
Staatsbibliothek
München
MONACENSIS.

Schnellpressendruck der J. G. Sprandel'schen Buchdruckerei in Stuttgart.

Vorrede.

Das Endziel vorliegender Arbeit ist die genaue Ermittlung der Querschnittsdimensionen der Brückenträger, wie solche in jedem gegebenen Falle festzustellen sind.

Mit Ausschluss der Bogen- und Kettenbrücken fassen wir alle übrigen Brücken-Constructionen unter dem Begriff der Balkenbrücken zusammen; in den Kreis unserer Untersuchungen fallen daher die meisten der in neuester Zeit ausgeführten Eisenbahnbrücken; aber auch zur Beurtheilung der Bogen- und Kettenbrücken, sowie der Bau-Constructionen im Allgemeinen ist ein richtiges Verständniss der Balkenbrücken erste Bedingung.

Die bisher allgemein angewendete Theorie ist schon von Navier in der Hauptsache zusammengestellt; der ungemeine Fortschritt der Technik hat nicht die Unrichtigkeit, wohl aber die Unvollständigkeit der gewöhnlichen Verfahrungsweise gezeigt; es hat sich die Nothwendigkeit ergeben, die Theorie auf breiterer Unterlage aufzubauen.

Unsere Bauliteratur zeigt denn auch ein lebhaftes Bestreben, die Lücken der Wissenschaft auszufüllen; besonders bemerkenswerth scheinen uns zwei gleichzeitig veröffentlichte Aufsätze: »Die Theorie der Brückenbalkensysteme von Fr. Schwedler« (Berliner Zeitschrift für Bauwesen 1851) und »der Bau der hölzernen und eisernen Brücken in England und Nordamerika von K. Culmann« (Förster'sche Bauzeitung 1851. 1852). Diesen beiden Arbeiten sind alljährlich neue Beiträge nachgefolgt und durch die technischen Zeitschriften mitgetheilt worden.

Gleichzeitig sehen wir die ausgezeichnetsten Ingenieure mit dem Bau von grossen eisernen Brücken beschäftigt; wir sehen dieselben Grundsätze, welche kaum erst in die Wissenschaft aufgenommen sind, in überraschender Weise practisch angewendet; wir sehen in Folge dessen eine Material-Ersparniss erzielt, welche dem Baue der eisernen Brücken eine immer allgemeinere Anwendung zuwenden muss.

Die soeben angeführten Bauten sind schon zum Studium und zum richtigen Verständniss der anzuwendenden Grundsätze von höchster Wichtigkeit, sie haben aber hauptsächlich den directen Erfolg gehabt, dass die unbestimmten Begriffe von 4- bis 20facher Sicherheit aus der Praxis verbannt sind und einer genauen Bestimmung der zulässigen Spannung und Pressung Platz gemacht haben, gleichwie auch über die bei Strassen und Eisenbahnbrücken in Rechnung zu ziehenden Belastungen allgemein gültige Normen gewonnen sind.

In Folge dieses glücklichen Zusammentreffens von Theorie und Praxis ist man heute schon im Stande, für den Bau der Brückenträger bestimmte Regeln zu geben. Wir haben hiebei streng den Gang der Wissenschaft beibehalten, aber wir haben es für nicht minder nothwendig erachtet, dass die endgültigen Formen direct und schnell die gesuchten Dimensionen geben, dass sie angewendet werden können, unabhängig von dem vollständigen Studium vorliegender Arbeit.

Das Material fanden wir grösstentheils fertig vor, es war hauptsächlich unsere Aufgabe, das an verschiedenen Orten Zerstreute zu sammeln und zum Gebrauch bequem darzulegen; nur wenige Lücken haben wir durch neue Untersuchungen ausgefüllt; diese Lösungen, zunächst nur zur Abrundung des Ganzen gegeben, dürften indessen an sich schon die Aufmerksamkeit der Freunde der Wissenschaft verdienen.

Während der Ausarbeitung vorliegenden Buches sind mehrere Werke von ähnlicher Tendenz erschienen, so namentlich: »Die Theorie der Holz- und Eisenconstructionen von dem k. k. Ministerial-Ingenieur Rebhann 1856« und in neuester Zeit »Die Theorie der Gewölbe, Futter-Mauern und eisernen Brücken von dem herzoglich braunschweig'schen Baurath Scheffler 1857.« Es liegt in der Natur der Sache, dass die einschlägigen Resultate dieser Werke den unsrigen in keiner Weise widersprechen, aber Auffassung und Umfang sind wesentlich verschieden. — Indem wir uns auf die Balkenbrücken beschränken, ist es uns möglich, die endgültigen Formeln in sehr bestimmter Weise aufzustellen. Neu ist namentlich gegenüber genannten Werken die Benützung der Schwedlerischen Balkentheorie (s. oben), sowie die vollständige Berücksichtigung der einseitigen Belastungen. — Wie sehr diese Verbesserungen in dem Bedürfniss der Praxis begründet sind, zeigen am besten die Beispiele ausgezeichneter Brückenbauten, welche unserer Abhandlung eingeschaltet sind.

Ob die Darstellungsweise dem vorgehabten Ziele entspricht, ob es uns gelungen ist, die wissenschaftlichen Wahrheiten in wirklich brauchbarer Weise zusammenzustellen, diese wichtigste Entscheidung überlassen wir dem freundlichen Urtheil unserer Fachgenossen.

Zürich und Stuttgart,
Juli 1857.

Die Verfasser.

Vorrede

zur zweiten Auflage.

In den sechs Jahren, welche seit dem Erscheinen dieses Buches verflossen sind, ist in Anwendung eiserner Brückenträger soviel Neues und Tüchtiges geleistet worden, dass bei der vorliegenden zweiten Auflage eine Umarbeitung und Vervollständigung einzelner Parthien nicht umgangen werden konnte; es gab uns diess erwünschte Veranlassung, zugleich diejenigen Stellen zu verbessern, wo es an Klarheit und Präcision fehlte.

Hiedurch dürften auch die gegen einzelne Punkte erhobenen Einwendungen ihre Beantwortung finden, indem wir Besseres benützt und Anderes auf das richtige Maass zurückgeführt haben; wir glauben auf diese Weise der Sache selbst einen besseren Dienst geleistet zu haben, als es durch abgerissene Erwiederungen auf einzelne Angriffe möglich gewesen wäre.

Durch diese Umarbeitung sind einige Abtheilungen wesentlich angewachsen. — Im ersten Abschnitt ist unsere Darstellung der nach jeder Richtung innerhalb der festen Körper wirkenden Schubkraft weiter ausgeführt und zum practischen Abschluss gebracht worden. — In der Theorie der relativ rückwirkenden Festigkeit haben wir uns dem heutigen Stande der Wissenschaft anzuschliessen gesucht und dabei durch Auswahl passender Erfahrungs-Coeffizienten die Leichtigkeit der practischen Anwendung gewahrt. —

Im zweiten Abschnitt haben wir uns insbesondere bemüht, die Bolzenverbindungen in systematischer und präciser Weise darzustellen. —

Im dritten Abschnitt ist durch Zahlenrechnung und graphische Darstellung nachgewiesen, welche gleichförmige Belastungen als Aequivalent eines Eisenbahn-Trains eingeführt werden dürfen.

Ferner wurde die Senkung der Zwischenstützen continuirlicher Träger berücksichtigt und zu weiteren Untersuchungen über den Einfluss der Continuität benützt.

Im vierten Abschnitte, welcher die Anwendung der Formeln zeigen soll, haben wir es vorgezogen, einzelne Constructionen vollständiger zu behandeln und die gewählten Beispiele in eingehender, dem Bedürfnisse der Praxis entsprechender Weise durchzuführen. Wir behalten uns vor, in einer Fortsetzung auch für die übrigen Anordnungen der Balkenbrücken Berechnungen und Beispiele zu geben, wozu der Umfang dieses Buches nicht ausgereicht hätte.

Möge die gute Aufnahme, welche die erste Auflage gefunden hat, auch dieser neuen Bearbeitung zu Theil werden.

Stuttgart, den 29. September 1863.

Die Verfasser.

INHALTS-VERZEICHNISS.

Erster Abschnitt.

Die Entwicklung der Fundamentalsätze.

Seite

§. 1. Einleitung 1

§. 2. Entwicklung der Bedingungen des Gleichgewichts mit specieller Anwendung auf Balkenbrücken 3

§. 3. Die Lehre von der Festigkeit stabförmiger Körper.

Festigkeit gegen Zug, Druck und Abscheeren 9

Relative Festigkeit 15

Gestalt der elastischen Linie und Verfahren von Clapeyron . 27

Schubkräfte in Folge der Biegung stabförmiger Körper . . . 34

Relativ rückwirkende Festigkeit 43

Zweiter Abschnitt.

Erfahrungs-Resultate über die Festigkeit der Bau-Materialien.

§. 4. Die Festigkeits-Coefficienten 57

§. 5. Von der Stärke der Verbindungen 64

Dritter Abschnitt.

Bestimmung der Vertikalkräfte und der Angriffsmomente.

§. 6. Frei aufliegende Träger 82

§. 7. Continuirliche Träger 104

Für zwei Oeffnungen 106

Für drei Oeffnungen 120

§. 8. Einfluss der Auflagerbreite und Träger-Anzahl 136

§. 9. Querträger, Schwellenträger und kleine Brücken 142

Vierter Abschnitt.

Entwicklung der praktischen Regeln für Brückenträger mit vollen Wandungen.

Seite

§. 10. Homogene Träger 147
§. 11. Die Blechwandbrücken 161
§. 12. Beispiel einer Blechwandbrücke von 15 M. Spannweite 175
§. 13. Die Eisenbahnbrücke bei Langon 183
§. 14. Resultate für Blechwandbrücken 192

Anhang.

§. 15. Vergleichung der Maasse und Gewichte verschiedener Länder . . 197

Druckfehler und Berichtigungen 202

Uebersicht

der angewendeten Bezeichnungen.

Nachstehend zusammengestellte häufiger vorkommende Zeichen haben in dem Buche durchgehends dieselbe Bedeutung und sind die allgemein gebräuchlichen Buchstaben thunlich beibehalten. Es ist

P — eine an einem Punkte thätige Kraft von bestimmter Richtung und Intensität.

E — der Elastizitätsmodul.

$\mathfrak{A}$ — die in einem gezogenen Körpertheil per Quadrateinheit herrschende Spannung.

$\mathfrak{B}$ — die in einem gedrückten Körpertheil per Quadrateinheit herrschende Pressung.

$\mathfrak{C}$ — die per Quadrateinheit herrschende Schubspannung, welche längs einer Fläche durch Scheerkräfte hervorgerufen ist.

Θ — das Trägheitsmoment einer Querschnittfläche.

Ω — der Querschnitt der Gurtung eines Trägers.

H — die ganze Höhe eines Trägers.

$\mathfrak{H}$ — die Distanz der Mittelpunkte von Zug und Druck in dem Querschnitt eines belasteten Trägers.

$\mathfrak{H}_0$ — die Distanz der Schwerpunkte der beiden Gurtungen eines Trägers.
Wie in den Druckfehlern bemerkt ist, ist auf Seite 22—25 irrthümlich $\mathfrak{H}$ anstatt $\mathfrak{H}_0$ gesetzt, was zu berichtigen wäre.

$\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{b}$) — die Entfernung der äussersten gespannten (gepressten) Längenfaser von der neutralen Axe.

$\mathfrak{a}_0$ ($\mathfrak{b}_0$) — die Entfernung des gespannten (gepressten) Gurtungs-Schwerpunkts von der neutralen Axe.

δ — die Dicke der Mittelrippe eines Trägers mit voller Wandfläche.

l — eine beliebige Trägerlänge oder Spannweite.

a, b, c . . . — die Spannweiten der aufeinander folgenden Oeffnungen einer Brücke mit continuirlichen Trägern.

A, B, C . . . — die aufeinander folgenden Auflager einer Brücke mit mehreren Oeffnungen, sowie die Reactionen dieser Auflager.

p — das Eigengewicht einer Brücke per Längeneinheit, bei Eisenbahnbrücken in der Regel für ein Geleise berechnet.

k — ebenso die zufällige (variable) Belastung per Längeneinheit.

$q = p + k$ — die Totalbelastung per Längeneinheit.

$\mathfrak{M}$ — das Angriffsmoment der äusseren Kräfte (moment de rupture).

ΣXy — das numerisch gleiche Widerstandsmoment des betrachteten Trägerquerschnitts.

$\mathfrak{V}$ — die in dem Querschnitt wirkende Vertikalkraft (effort tranchant).

ΣY — der numerisch gleiche Vertikal-Widerstand in dem betrachteten Trägerquerschnitt.

Es ist in den Gleichungen Meter-Maass und Gewicht angenommen, insofern nichts Besonderes bemerkt ist; doch lassen sich die praktischen Formeln mittelst der Reductionstabellen des Anhangs leicht auf andere Maasse und Gewichte übertragen.

Erster Abschnitt.

Die Entwicklung der Fundamentalsätze.

§. 1. Einleitung.

1. Die wesentlichen Bestandtheile einer Brücke sind: die Auflager (Widerlager und Pfeiler), die Brückenträger und die Fahrbahn; letztere kann eine für Fuhrwerke und Fussgänger passende Plattform, oder auch eines oder mehrere Schienengeleise enthalten; die Fahrbahn kann unmittelbar auf den Brückenträgern aufliegen, wie z. B. bei Brücken von kleiner Spannweite oder bei steinernen Gewölben, meist ist sie jedoch durch ein System von Querträgern oder Zwischenträgern mit den Brückenträgern verbunden. — Weitere Bestandtheile einer Brücke bilden die Diagonal-Verbindungen (Windkreuze, Contreventements), welche nur dann entbehrt werden können, wenn Fahrbahn oder Brückenträger (wie z. B. bei Gewölben) hinreichende Festigkeit gegen Seitenbewegungen haben, und endlich das Brückengeländer, insofern letzteres nicht durch die Brückenträger selbst schon gegeben ist.

Da wir hauptsächlich den Bau der Brückenträger im Auge haben, so sind uns letztere auch für die Classification der Brücken massgebend. — Die Brückenträger, soweit sie nicht homogene, volle Balken sind, zeigen stets ihrer ganzen Länge nach durchlaufende Bänder, welche wir Gurtungen, Tragbänder, Längsbänder nennen. Nach der Gestalt und Wirkungsweise dieser Bänder unterscheiden wir:

1) Bogenbrücken; es ist für jeden Träger ein für sich bestehendes, nach oben convexes Band, der Bogen, vorhanden; dieser ist vermöge seiner Steifigkeit in Ruhe.

2) Ketten- oder Hängebrücken; es ist für jeden Träger nur ein nach oben conkaves Band, die Kette, vorhanden; letztere strebt bei jeder Art der Belastung einem stabilen Gleichgewicht zu, und insoferne dieses meist nur durch Aenderungen in der

Gestalt der Kette möglich ist, so entstehen hiedurch Oscillationen und Seitenschwankungen. — Man kann letzteren dadurch begegnen, dass man die Kette in ähnlicher Weise wie den Bogen als steifes Band herstellt, doch gehen hiedurch die hauptsächlichsten Vortheile der Kette verloren, und wird die Theorie der Kettenbrücken stets von der Bogentheorie zu unterscheiden sein.

3) Balkenbrücken; es sind stets für jeden Träger zwei Tragbänder oder Gurtungen vorhanden; dieselben können gerade oder beliebig gekrümmt sein, wesentlich ist, dass beide Gurtungen auf ihre ganze Länge fest mit einander verbunden sind; die Verbindung geschieht durch einzelne Streben oder durch mehr oder weniger dicke volle Wandungen; hiedurch ist bewirkt, dass keine der beiden Gurtungen ohne die andere eine Formänderung annehmen kann, und wird letztere, wenn sie in Folge der Belastung des Trägers eintritt, wie beim homogenen Balken als eine Biegung des ganzen Trägers sich darstellen.

Bogen und Kette üben einen Horizontalschub auf die Widerlager aus, eben weil sie im Allgemeinen nur ein Band haben; es kann jedoch dieser Horizontalschub auch durch ein gerades Band, durch eine Bogensehne aufgenommen werden, ohne dass hiedurch eine Balkenbrücke erhalten wird, da die innige Verbindung zwischen Band und Sehne fehlt; leztere ist nur als eine Hilfsconstruktion, als Ersatz für die Stabilität der Widerlager anzusehen. — Es ist denkbar, dass eine Brücke zugleich Bogen- und Kettenbrücke ist; eine solche Brücke hätte den Vortheil, dass die convexen und conkaven Bogen ihren Horizontalschub gegenseitig aufnehmen, ohne dass die Wandausfüllungen wie bei der Balkenbrücke nothwendig werden. — Ihre praktische Anwendung ist jedenfalls auf ganz besondere, abnorme Fälle beschränkt.

2. Wir theilen die Abhandlung in einzelne Abschnitte; im ersten Abschnitte werden die Gesetze des Gleichgewichts und der Festigkeitslehre entwickelt, erstere mit vorzugsweiser Berücksichtigung der Balkenbrücken; denn nicht nur ist die Anwendung der Balkenbrücken ganz besonders ausgebreitet, sondern es bilden auch die balkenförmigen Träger bei fast allen anderen Bauconstructionen wesentliche Zwischenglieder.

Die nächstfolgenden zwei Abschnitte dienen zur Ergänzung einzelner Parthien der im ersten Abschnitt entwickelten Theorie, und zwar werden im zweiten Abschnitt die Erfahrungsresultate der Festigkeitslehre (die sogenannten Festigkeitscoefficienten) übersichtlich zusammengestellt, während im dritten Abschnitt für Balkenbrücken die jedem Querschnitt eigenthümlichen Kräftesummen und Kraftmomente für die verschiedenen Anordnungen und verschiedene Spannweiten in eingehender Weise entwickelt werden.

Mit dem vierten Abschnitt beginnt die Aufstellung von praktischen Formeln für einzelne Constructionsgattungen auf Grundlage der im ersten Abschnitt entwickelten Theorie und mit steter

Benützung der im zweiten und dritten Abschnitt gesammelten Resultate. — Diese praktischen Formeln sind der Art eingerichtet, dass man aus den Hauptabmessungen und Querschnittdimensionen der Brücke die im Material herrschende Spannung oder Pressung sofort und direct erhält, oder aber in ebenso einfacher Weise unter Annahme einer zulässigen Spannung des Materials die Querschnittdimensionen aus den Hauptabmessungen der Brücke erhalten kann; zu diesen beiden Zwecken sind unsere praktischen Formeln in gleicher Weise dienlich.

§. 2. Entwicklung der Bedingungen des Gleichgewichts mit spezieller Anwendung auf Balkenbrücken.

3. Wenn irgend ein Körper in Ruhe sein soll, so müssen die an ihm thätigen äusseren Kräfte im Gleichgewicht sein.

Im Brückenbau ist die Schwere die hauptsächlichste Kraft, welcher die Construktionen zu widerstehen haben; es ist diess das Eigengewicht der Construktion und die zufällige Last; letztere ist für Strassenbrücken durch ein Menschengedränge und grösste Lastwagen, für Eisenbahnbrücken durch das Gewicht einer Reihe von Lokomotiven sammt Tender gegeben. — Andere vertikale Kräfte, wie die Centrifugalkraft, sind zu gering, als dass sie besonders in Betracht gezogen werden müssten; man kann sie durch eine kleine Vermehrung der zufälligen Last berücksichtigen.

In mehr oder weniger horizontalem Sinne wirkt nun die Kraft der Windstösse; im Vergleich zu der Schwere sind diese Kräfte allerdings gering, aber insofern ihre Richtung, wie bemerkt, eine ganz verschiedene ist, so erfordern diese Kräfte besondere Anordnungen, welche unter dem Namen Windkreuze

Tabelle I.

Geschwindigkeit des Windes in Metern per Sekunde.	Druck in Kilogrammen per Quadrat-Metre.
3,00 M.	1,047 Kilogr.
5,00 M.	2,908 „
8,00 M.	7,443 „
10,85 M.	13,691 „
14,00 M.	22,790 „
20,00 M.	46,520 „
40,00 M.	186,080 „

(Contreventements) bekannt sind. — Während die Dimensionen der Brücke im Allgemeinen durch die vertikalen Kräfte, also hauptsächlich Eigengewicht und zufällige Last, bestimmt sind, so muss die Brücke auch in horizontalem Sinne richtig construirt

sein, d. h. die umgelegte (um einen rechten Winkel gedrehte) Brücke muss wiederum einen richtig construirten Träger von allerdings bedeutend geringerer Tragkraft bilden. — Wenn man in besonderen Fällen die Stärke der Windkreuze berechnen will, so dient hiefür vorstehende Tabelle von Morin.

Den als bekannt vorauszusetzenden angreifenden Kräften steht zur Herstellung des Gleichgewichts gegenüber die Reaktion der Auflager; sie ist nach Richtung und Intensität in jedem Augenblicke gerade so wirksam, wie es die Herstellung des Gleichgewichts verlangt.

Dass die Auflagerreaktionen in der so eben angedeuteten Weise ihre Richtung und Intensität wechseln können, ist die Folge unendlich kleiner Formänderungen, welche die Auflager in Folge der wechselnden Belastung erleiden; wir werden in der Folge zeigen, wie diese zunächst unbekannten Auflagerreaktionen stets aus den angreifenden Kräften bestimmt werden können.

Erst wenn sämmtliche äusseren Kräfte bekannt sind, kann zur Bestimmung der sogenannten inneren Kräfte, d. h. der im System stattfindenden Spannungen und Pressungen, geschritten werden.

Die zweite Operation einer jeden statischen Berechnung ist daher: aus den gegebenen äusseren Kräften die an jedem Punkte des Systems thätigen inneren Kräfte, d. h. den per Quadrateinheit herrschenden Druck, Zug oder Schub zu bestimmen.

Hiezu dient folgende Betrachtung. Eine Construktion, die unter Einwirkung beliebiger äusserer Kräfte im Gleichgewicht ist, werde durch eine beliebige Fläche in zwei Fragmente getheilt; die jedem Fragmente zukommenden äusseren Kräfte werden im Allgemeinen nicht im Gleichgewicht sein; jedes Fragment müsste sich in Bewegung setzen, wenn nicht die an der Trennungsfläche thätigen inneren Kräfte gerade hinreichend wären, den betreffenden äusseren Kräften das Gleichgewicht zu halten. Hiedurch findet man nach den Bedingungen des Gleichgewichts die Resultante der in jedem Querschnitt thätigen inneren Kräfte, welche im Allgemeinen aus einer Kraft und einem Gegenpaar bestehen wird.

Es wird nun allerdings ein beliebig gedachter Körper derartige Formänderungen erleiden, dass es äusserst schwierig erscheinen muss, aus der so gefundenen Resultante die an jedem Theil des Querschnitts herrschenden Kräfte zu bestimmen; anders verhält es sich mit den Bauconstruktionen und mit den Brückenbauten insbesondere; die einzelnen Bestandtheile sind nach dem Bedürfniss angeordnet und durch diese Regelmässigkeit der Anordnung ist die Möglichkeit gegeben, die Gesetze zu finden, nach welchen die Kräfte auf jeden Querschnitt sich vertheilen; — da diese Vertheilung lediglich von den Eigenthümlichkeiten jeder

Construktion abhängt, so ist auch das zu beobachtende Verfahren in jedem Falle ein anderes, wie wir in der Folge sehen werden.

4. Die Bedingungen des Gleichgewichts bilden einen integrirenden Theil jeder Untersuchung; denn sie sind stets nothwendig, um die innern Kräfte aus den bekannten äussern zu bestimmen. Gewöhnlich sind aber auch einzelne der äussern Kräfte (Reaktion der Widerlager etc.) nicht vorweg bekannt, und es dienen in erster Linie wieder die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts zur Bestimmung der unbekannten äussern Kräfte.

Die Bedingungen des Gleichgewichts sprechen sich folgendermassen aus:

Werden sämmtliche an einem Körper thätigen Kräfte P nach drei zu einander senkrechten Axen, x, y, z nach dem Parallelogramm der Kräfte in ihre Composanten P_x, P_y, P_z zerlegt, so ist, wenn Gleichgewicht bestehen soll, erstens die algebraische Summe dieser Composanten nach jeder der 3 Axen gleich Null. Es ist somit:

$$\Sigma P_x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$
$$\Sigma P_y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$
$$\Sigma P_z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Wenn man zweitens in Bezug auf jede der 3 Axen die Momente bildet und bedenkt, dass das Moment der Kraft P in Bezug auf die Axe der z ausgedrückt ist durch die Produkten-Summe

$$yP_x + xP_y,$$

wo x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft P bezeichnen, so erfordert das Gleichgewicht, dass die Summe der Momente aller Kräfte bezogen auf jede der 3 Axen gleich Null sei. Es ist somit:

$$\Sigma yP_x + \Sigma xP_y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$
$$\Sigma zP_x + \Sigma xP_z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$
$$\Sigma yP_z + \Sigma zP_y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Die Axe der y wird im Folgenden immer parallel der Richtung der Schwere angenommen werden, die Axe der x ist somit horizontal und wird in die Längenaxe des Baues gelegt, die meisten Kräfte, die wir zu betrachten haben, sind so parallel der Ebene xy und wir haben daher meist blos die 3 Gleichungen 1) 2) und 4) anzuwenden.

Bezeichnen wir mit ΣX und ΣY die Summe der horizontalen, beziehungsweise vertikalen Composanten der in irgend einem Querschnitt thätigen inneren Kräfte, verlegen wir sodann den Coordinaten-Ursprung in den fraglichen Querschnitt selbst, und behalten wir endlich die frühern Bezeichnungen P_x und P_y für die horizontalen und vertikalen Composanten der äusseren Kräfte bei, so sprechen sich die Bedingungen des Gleichgewichts aus:

$$\Sigma X = \Sigma P_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$
$$\Sigma Y = \Sigma P_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$
$$\Sigma Xy = \Sigma xP_y + \Sigma yP_x \quad . \quad . \quad 9)$$

In diesen 3 Gleichungen sind die äusseren Kräfte und ihre Momente zu den inneren Kräften und ihren Momenten entgegengestellt; die Grösse $[\Sigma xP_y + \Sigma yP_x]$ ist das Moment der äusseren Kräfte in Bezug auf den fraglichen Querschnitt und wird in der Folge Angriffsmoment genannt; ΣP_x ist der Horizontalschub, die Grösse ΣP_y nennen wir Vertikalkraft.

Für Balkenbrücken sind die Reaktionen der Auflager gewöhnlich parallel der Richtung der Schwere angenommen, indem man absieht von den kleinen horizontalen Kräften, welche z. B. in Folge der Temparaturänderung und hiedurch hervorgerufener Reibung entstehen; der Horizontalschub ΣP_x ist dann gleich Null und ebendamit fällt auch das Glied ΣyP_x des Angriffsmoments aus, und die Gleichungen 7) bis 9) nehmen folgende einfache Gestalt an:

$$\Sigma X = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$
$$\Sigma Y = \Sigma P_y \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$
$$\Sigma Xy = \Sigma xP_y \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

Aus Gleichung 10) folgt, dass für Balkenbrücken ΣXy ein Gegenpaar ist, dessen Moment nach den Eigenschaften dieser Kräftepaare unabhängig ist, von der Wahl des Coordinaten-Ursprungs; wo immer auch derselbe gewählt wird, so ist für Balkenbrücken ΣXy und ebendesshalb auch das Angriffsmoment ΣxP_y eine für den fraglichen Querschnitt constante Grösse.

Wir nennen ΣXy das Widerstandsmoment des Querschnitts und ΣY den Vertikalwiderstand; diese beiden Grössen sind, wie wir so eben gesehen haben, für Balkenbrücken dem Angriffsmoment und beziehungsweise der Vertikalkraft numerisch gleich und direkt entgegengesetzt; wir bezeichnen in der Folge mit $\mathfrak{M}$ das Angriffsmoment und mit $\mathfrak{V}$ die Vertikalkraft für den zu betrachtenden Querschnitt einer Balkenbrücke, wonach sich die Gleichungen 10) bis 12) anschreiben:

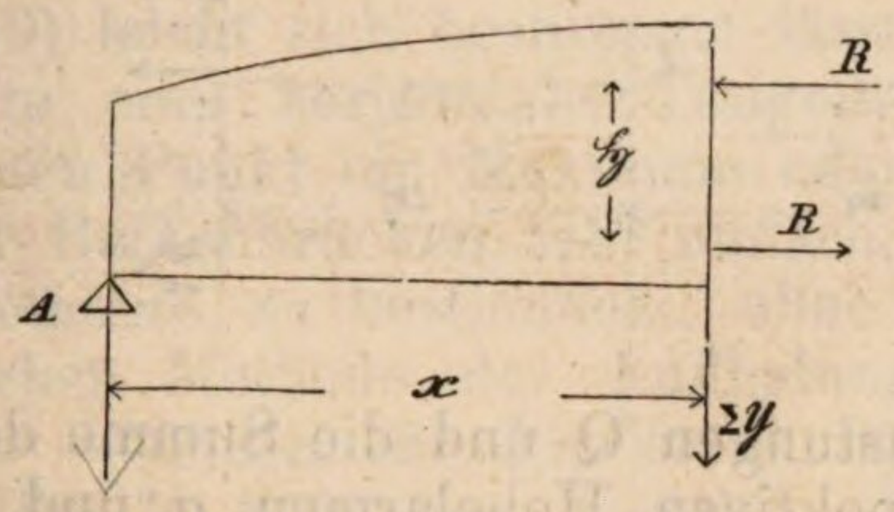
$$\Sigma X = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10^a)$$
$$\Sigma Y = \mathfrak{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11^a)$$
$$\Sigma Xy = \mathfrak{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12^a)$$

Von den äusseren Kräften bezeichnen wir die Reaktionen der Auflager immer mit den für dieselben Auflagerpunkte gwählten Buchstaben A, B, C . . . . . , das Eigengewicht der Brücke per Längeneinheit mit p, sodann in gleicher Weise die zufällige Last mit k und die Gesammtbelastung mit q, je auf die Längeneinheit reduzirt; es kann hiebei p, k und q für jeden Querschnitt einen anderen numerischen Werth haben.

5. Hr. Schwedler hat in einem Aufsatze über Balkenbrücken in der Zeitschrift für Bauwesen von Erbkam, Jahrgang 1851, das Widerstandmoment ΣXy und den Vertikalwiderstand ΣY in dieser

Form eingeführt und hiebei auf eine merkwürdige Relation zwischen diesen beiden Grössen aufmerksam gemacht. — Wir betrachten das eine freie Ende eines beliebigen Balkens, und nehmen den Coordinatenursprung im Auflagepunkt A an; x sei die Abscisse irgend eines Querschnitts, die Belastung sei beliebig und durch ein Gesetz $q = F(x)$ gegeben, wo q wie schon in N°. **4.** bemerkt, die auf die Längeneinheit reduzirte Belastung im Querschnitt x bezeichnet, so dass $\int_o^x q \,.\, dx$ die zwischen A und x vertheilte Last angibt; die Grössen ΣX, ΣY oder ΣXy haben die in N°. **4.** erläuterte Bedeutung, und ebenso bezeichnet A den am Auflagepunkt A wirkenden Auflagerdruck. — Die Bedingungen des Gleichgewichts sind für vorliegende Annahme des Coordinaten-Ursprungs

Fig. 1.



$$\Sigma X = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

$$\Sigma Y = A - \int_o^x q \,.\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

$$\Sigma Xy = \int_o^x qx \,.\, dx + x\Sigma Y \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den Gleichungen 10ª) bis 12ª) dadurch, dass der Werth des Widerstandsmoments ΣXy nicht mehr durch äussere Kräfte allein dargestellt ist, sondern auch von dem Vertikalwiderstand ΣY abhängig ist.

Denken wir uns eine Abscisse a so gewählt, dass $A = \int_o^a qdx$, was ja immer möglich ist, so ist nach Gleichung 14):

$$\Sigma Y = \int_x^a qdx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

d. h. die Grösse ΣY ist immer gleich dem zwischen a und x vertheilten Gewichte; wir sehen, ΣY nimmt gegen die Auflager hin zu und ist gleich Null für die Abscisse a.

Differentiirt man in 14) und 15) die Grössen ΣY und ΣXy nach x, so erhält man

$$d\Sigma Y = - qdx$$

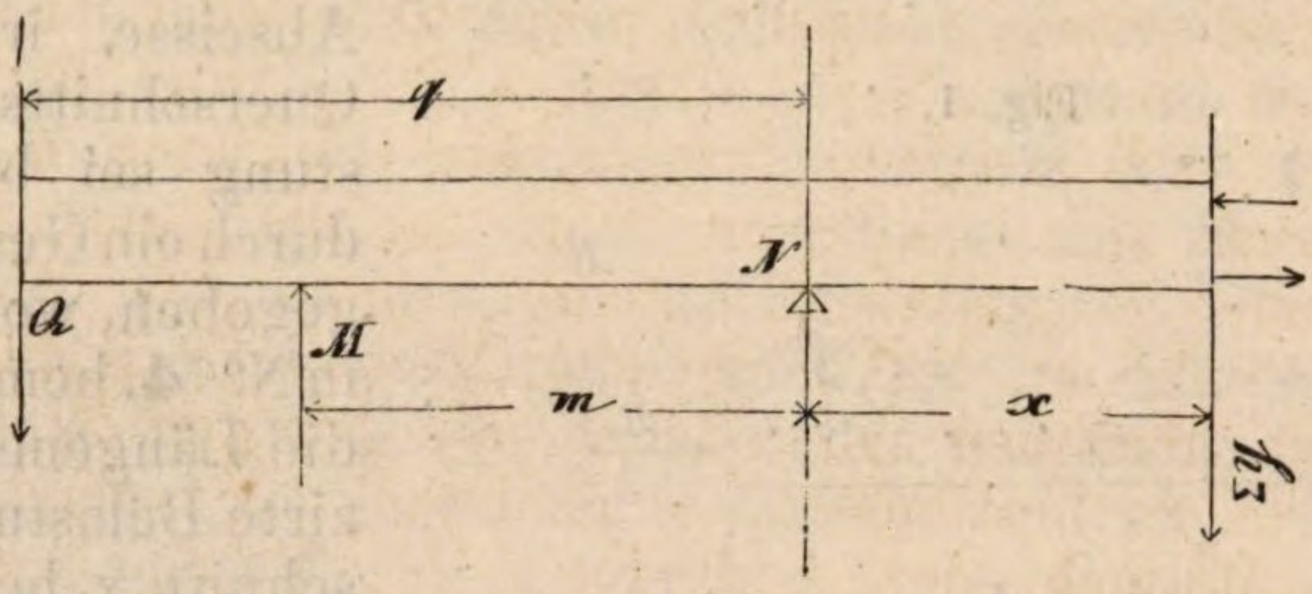
$$d\Sigma Xy = qxdx + \Sigma Y \,.\, dx + xd\Sigma Y$$

woraus folgt:

$$\frac{d\Sigma Xy}{dx} = \Sigma Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17)$$

Denken wir uns den Auflagerpunkt N als Zwischenpunkt eines continuirlichen Trägers und führen wir links vom Coordinaten-

Fig. 2.



Ursprung die Summe der Belastungen Q und die Summe der Auflagerdrücke M mit ihren respektiven Hebelarmen q und ~~M~~ m ein, so erhalten die Gleichungen 13) bis 15) die Form:

$$\Sigma X = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13^a)$$

$$\Sigma Y = M + N - (Q + \int_o^x q dx) \quad . \quad . \quad . \quad 14^a)$$

$$\Sigma Xy = \int_o^x qx dx + x\Sigma Y + Mm - Qq \quad . \quad 15^a)$$

Denken wir uns wieder eine Abscisse a so gewählt, dass $M + N - Q = \int_o^a q dx$, so ist wie oben

$$\Sigma Y = \int_x^a q \, . \, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16^a)$$

d. h. ΣY ist auch hier gleich dem zwischen x und dem Punkte $\Sigma Y = 0$ vertheilten Gewicht.

Ferner sieht man bei Betrachtung der Gleichungen 14^a) und 15^a) sogleich, dass durch Differentiiren dieser Gleichungen dieselben Werthe für $d\Sigma Y$ und $d\Sigma Xy$ erhalten werden, wie aus den Gleichungen 14) und 15), und dass somit Gleichung 17) für continuirliche Träger ebenso unbedingt gültig ist, wie für Balken, welche bloss über eine Oeffnung gespannt sind.

6. Der numerische Werth des Widerstandsmoment ΣXy ist bei Balkenbrücken unabhängig von der Wahl des Coordinaten-Ursprungs, es kann hiefür das für denselben Querschnitt berechnete Angriffsmoment $\mathfrak{M}$ substituirt werden, welch letzeres Moment in Beziehung auf den Querschnitt selbst gedacht, aus den bekannten äusseren Kräften stets leicht gebildet werden kann; dass die Vertikalkraft $\mathfrak{V}$ stets gleich dem Vertikalwiderstand ΣY ist, geht aus den Gleichungen 8), 11^a) und 16) zur Genüge hervor.

Wenn daher x die Abscisse irgend eines Querschnitts unter der Annahme irgend eines Coordinatenursprungs bezeichnet, — und das Angriffsmoment $\mathfrak{M}$ desselben Querschnitts in Function dieser Abscisse x ausgedrückt ist, so ist nach Gleichung 17) stets

$$\frac{d\,\mathfrak{M}}{dx} = \mathfrak{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18)$$

Wenn man die Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ für genügend viele Querschnitte x als Ordinaten aufträgt, so wird eine Curve gewonnen, deren trigonometrische Tangenten proportional sind den in denselben Querschnitten thätigen Vertikalkräften $\mathfrak{V}$. — Für $\mathfrak{V} = 0$, welches weil mit $\Sigma Y = 0$ zusammenfallend, aus Gleichung 14), 14ª) oder auch 16) leicht sich bestimmen lässt, hat die Curve der Angriffsmomente eine horizontale Tangente, d. h. der Werth $\mathfrak{M}$ hat für diesen Punkt ein Maximum oder Minimum erreicht; es ist daher für Balkenbrücken sehr einfach, die grössten Werthe der Angriffsmomente zu bestimmen, ohne dass man irgend zu der umständlichen Methode der Auffindung der Maximalwerthe greifen müsste. — Auch für die Vertikalkräfte $\mathfrak{V}$ denken wir uns eine Curve durch Auftragen hinreichend vieler Werthe $\mathfrak{V}$ gebildet; solche Curven der $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ sind z. B. in den graphischen Darstellungen Tafel II. und folgende eingetragen, indem hiebei stets oberhalb der Abscissenaxe die Curve der $\mathfrak{M}$, und unterhalb derselben die Curve der $\mathfrak{V}$ sich befindet; — es sind hiebei negative Werthe durch Umklappen auf diejenige Seite der Abscissenaxe gebracht, wo je die positiven Werthe sich befinden, indem es sich in erster Linie stets um den numerischen Werth der Grössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ handelt.

7. Wenn man sich für die inneren Kräfte eines Querschnitts die Summe der positiven und negativen horizontalen Composanten abgesondert bildet und diese Resultanten R und R' der beiderlei horizontalen Kräfte in ihren respektiven Angriffspunkten wirksam denkt, so dass mit $\mathfrak{H}$ der Abstand der beiden Kräftesummen bezeichnet ist, so ist nach der Definition der Gegenpaare

$$\mathfrak{M} = \Sigma Xy = \mathfrak{H}R = \mathfrak{H}R' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

Wenn z. B. die sämmtlichen horizontalen Kraftcomposanten an irgend einer Stelle eines Trägers je in einem gezogenen und einem gedrückten Bande vereinigt sind, und die Druck- und Zugmittelpunkte in diesen Bändern mit hinreichender Genauigkeit sich vorab bestimmen lassen, so gibt Gleichung 19) die in jedem Band wirkende horizontale Kraft R direkt aus dem Angriffsmoment $\mathfrak{M}$, und lässt sich die ganze im Band wirkende Kraft sofort bestimmen durch Dividiren mit dem Cosinus des Neigungswinkels, den das Band an dieser Stelle mit dem Horizont bildet.

§. 3. Die Lehre von der Festigkeit stabförmiger Körper.

8. Die Theorie der absoluten und absolut rückwirkenden Festigkeit beruht auf der Wahrnehmung, dass ein stabförmiger Körper, der nach seiner Längenrichtung gezogen oder gedrückt wird, diesen Druck oder Zug auf seinen Querschnitt gleichförmig vertheilt, so dass stets die Relation stattfindet:

$$P = \mathfrak{A} w = \mathfrak{B} w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20)$$

Die Grösse P bezeichnet die einwirkende Kraft, w den Querschnitt des fraglichen Stabs, $\mathfrak{A}$ die per Quadrateinheit herrschende Spannung, $\mathfrak{B}$ ebenso die per Quadrateinheit herrschende Pressung.

(Wir werden die Ausdrücke „Spannung und „Pressung“ stets nur für eine per Quadrateinheit berechnete Kraft gebrauchen.)

Bezeichnen wir mit P_a denjenigen Zug, mit P_b denjenigen Druck, der eine Zerstörung des Stabes (Zerreissen, beziehungsweise Zerdrücken) zur Folge hat, ferner mit $\mathfrak{A}_o$ und $\mathfrak{B}_o$ die betreffende Spannung und Pressung pro Quadrateinheit, so ist:

$$\left.\begin{aligned} P_a &= \mathfrak{A}_o\, w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ P_b &= \mathfrak{B}_o\, w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\} \quad 21)$$

Es ist Erfahrung, dass $\mathfrak{A}_o$ und $\mathfrak{B}_o$ für ein und dasselbe Material nahezu denselben Werth hat. In der Praxis nimmt man einen bestimmten Bruchtheil von $\mathfrak{A}_o$ und $\mathfrak{B}_o$ als grösste zulässige Spannung oder Pressung an.

Anmerk. Für diesen sowie die folgenden Fälle sei darauf hingewiesen, dass die praktischen Coefficienten im zweiten Abschnitt zusammengestellt sind.

9. Ein Stab erleidet durch einen nach seiner Länge gerichteten Zug eine Verlängerung, durch einen Druck eine Verkürzung, welche erfahrungsgemäss seiner Länge und der per Quadrateinheit herrschenden Spannung $\mathfrak{A}$ oder Pressung $\mathfrak{B}$ proportional ist. Diese Verlängerung oder Verkürzung ist somit ausgedrückt durch die Formel:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\mathfrak{A}}{E} = \frac{\mathfrak{B}}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

hierin bezeichnet:

l die ursprüngliche Länge des Stabes,
λ die Verlängerung oder Verkürzung,
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wie oben die Spannung oder Pressung (pro Quadrateinheit),
E einen Coefficienten, der von der Natur des Materials abhängig ist und für Druck und Zug verschiedenen Werth haben kann. Man hat diesem Coefficienten den Namen Elasticitäts-Modul gegeben.

Für diejenigen Spannungen und Pressungen, welche bei Bauconstruktionen nicht überschritten werden sollen, ist der Elasticitätsmodulus eine für jedes Material bestimmte constante Grösse und hat innerhalb dieser Grenzen auch für Druck und Zug denselben Werth. Wenn wir nämlich in Gleichung 22) die Spannung $\mathfrak{A}$ oder Pressung $\mathfrak{B}$ in Kilogrammen per Quadratcentimeter angeben und l und λ in demselben, übrigens beliebigen Maassstab, ausdrücken, so ist der Werth von E gleichfalls in Kilogrammen durch folgende Tabelle II. gegeben:

Tabelle II.

Für Holz	E = 100000 Kilogr.
„ Schmiedeisen . .	E = 1‘800000 „
„ Gusseisen . . .	E = 900000 „

Der Elasticitäts-Modul E stellt eine Spannung dar, welche die Länge des gezogenen Stabes verdoppeln würde; eine derartige Spannung können aber die Baumaterialien nicht ertragen, vielmehr bewegen sich die Statt habenden Verlängerungen und Verkürzungen innerhalb weit geringerer Beträge; nachstehende Tabelle III. zeigt die Formänderungen, welche in Folge der beim Bauen zulässigen Spannungen und Pressungen eintreten, indem die in Tabelle II. aufgestellten Werthe der Elasticitäts-Module zu Grunde gelegt sind.

Tabelle III.

Spannung oder Pressung pro Quadratcentim. in Kilogr.	Ausdehnung oder Verkürzung $\frac{\lambda}{l}$		
	Holz	Schmiedeisen	Gusseisen
100	1/1000	1/18000	1/9000
200	—	1/9000	1/4500
400	—	1/4500	1/2250
600	—	1/3000	1/1500
800	—	1/2250	1/1125
1000	—	1/1800	1/900
1200	—	1/1500	1/750
1400	—	1/1286	1/643
1600	—	1/1125	1/562

10. Das durch diese Tabelle ausgesprochene Gesetz ist nicht in aller Strenge richtig; es ändert sich nicht nur wesentlich, wenn die Spannungen die in der Praxis üblichen überschreiten, sondern auch innerhalb dieser Grenzen sind die in Tabelle II. gegebenen Elasticitäts-Module nur Mittelwerthe.

Für Schmiedeisen ist nach den Versuchen von Hodgkinson bei Belastungen bis zu 1600 Kilo pro Quadrat-Centimeter

für Zug E = 1‘634000,
für Druck E = 1‘968000,

somit im Mittel, wie in Tabelle II. angenommen, E = 1‘800000. — Bei grösseren Belastungen nimmt der Elasticitätsmodul wesentlich ab, so dass er z. B. bei einer Spannung von 2400 Kilo pro Qua-

drat-Centimeter nur etwa 1/3 des obigen Mittelwerths von 1‘800000 beträgt; und ähnlich, nur in geringerem Maasse, nimmt der Elasticitäts-Modul für gepresstes Schmiedeisen ab. Bei diesen grösseren Belastungen und hauptsächlich in der Nähe des Bruchs ist der Elasticitäts-Modul für verschiedene Eisengattungen wesentlich verschieden, so dass für die beim Zug beobachtete Bruchbelastung $\frac{\lambda}{l}$ zwischen 1/8 und 1/60 schwankt; ersterer Werth gilt für sehr sehniges, letzterer für schlechtes, crystallinisches Schmiedeisen.

Es zeigt sich ferner, dass bei diesen grösseren Belastungen ein vollständiges Zurückgehen in die frühere Lage nach Wegnahme der Belastung nicht mehr eintritt, sondern eine gewisse bleibende (permanente) Verlängerung oder Verkürzung zurückbleibt; dies findet beim Schmiedeisen im Allgemeinen in bemerkbarer Weise dann Statt, wenn die Belastung 1600 Kilo pro Quadrat-Centimeter übersteigt; man erhält hiedurch den Begriff der Grenze der Elasticität und haben einzelne Constructeure die zulässige Belastung von der Elasticitätsgrenze abgeleitet; es setzt diess jedoch voraus, dass diese Grenze durch subtile Beobachtung der Formänderungen erhoben sei, und insofern diese Grenze von der Qualität des Materials wesentlich abhängt, im gegebenen Falle neu erhoben werde, was stets erhebliche Schwierigkeiten mit sich bringen dürfte. — Andererseits ist es nicht nur Thatsache, dass die Erscheinungen des Bruchs weit präciser sich darstellen, somit weit leichter zu beobachten sind, sondern es ist auch die Bruchbelastung für die verschiedenen Eisensorten durchaus nicht so unter sich abweichend und schwankend, als die Elasticitätsgrenze.

Aus diesen Gründen scheint uns die zulässige Belastung unbedingt aus der Bruchbelastung abzuleiten zu sein, wie diess schon im Eingang von N°. **8** angenommen ist; wir stellen keine besonderen Untersuchungen über die Nähe der Elasticitätsgrenze an, sondern es genügt für unsere Berechnungen zu wissen, dass die zulässigen Spannungen und Pressungen sich noch hinreichend innerhalb der Elasticitätsgrenze bewegen; innerhalb dieser Grenze hat für Schmiedeisen der Elasticitäts-Modul den für Druck und Zug annähernd gleichen Werth von 1‘800000 Kil.

11. Beim Gusseisen treten ähnliche Erscheinungen ein, nur ist der Elasticitäts-Modul noch mehr verschieden, und zwar wiederum abnehmend mit steigender Belastung. — Eine bestimmte Elasticitätsgrenze lässt sich gar nicht angeben, denn das Gusseisen zeigt fast bei jeder Belastung eine bleibende Formänderung.

Zur nähern Erläuterung dienen nachfogende Tabellen, welche den Versuchen des Eaton Hodgkinson entnommen sind.

Tabelle IV.

Elasticitätsmodule für Gusseisen beim Zug.

Belastung pro Quadratcentim. in Kilogr.	Verlängerung pro lauf. Metre,		Elasticitätsmodul pro Quadrat-Centimetre.
	total.	permanent.	
Kilo	M.	Mm.	Kilo
73,955	0,000075	0	985567
111,005	0,000114	0,00183	977467
148,142	0,000155	0,00454	956369
220,630	0,000239	0,00891	923100
296,206	0,000326	0,01460	909650
370,282	0,000416	0,02200	889255
444,336	0,000551	0,03100	870385
517,436	0,000611	0,04300	846490
592,450	0,000715	0,05590	828180
666,508	0,000828	0,07030	804407
740,555	0,000946	0,08840	782785
814,619	0,001068	0,10880	762420
886,672	0,001206	0,13390	754117
962,787	0,001392	0,17460	693111
1039,621	0,001548	0,20070	672313

Tabelle V.

Elasticitätsmodule für Gusseisen beim Druck.

Belastung pro Quadratcentim. in Kilogr.	Verkürzung pro lauf. Metre,		Elasticitätsmodul pro Quadrat-Centimetre.
	total.	permanent.	
Kilo	M.	Mm.	Kilo
145,105	0,00015605	0,003914	929278
290,209	0,00032396	0,01882	898608
439,315	0,00049784	0,03331	874407
580,419	0,00065625	0,05371	884580
725,525	0,00082808	0,07053	876147
870,644	0,00100253	0,09053	868443
1015,535	0,0011795	0,11700	861172
1160,840	0,0013606	0,14258	853178
1305,495	0,0015411	0,17085	847426
1451,050	0,0017175	0,20685	844839
1741,256	0,0020786	0,36810	837678
2032,171	0,0024733	0,45810	821648
2326,661	0,0029432	0,50768	788718

Nimmt man die Mittelwerthe dieser Elasticitätsmodule bis zu den Belastungen von 592^k beziehungsweise 1741 Kilo inclusive, so erhält man

für die Ausdehnung:

$$E = 909607^k \text{ pro Quadrat-Centimeter,}$$

für die Zusammendrückung:

$$E = 880476^k$$

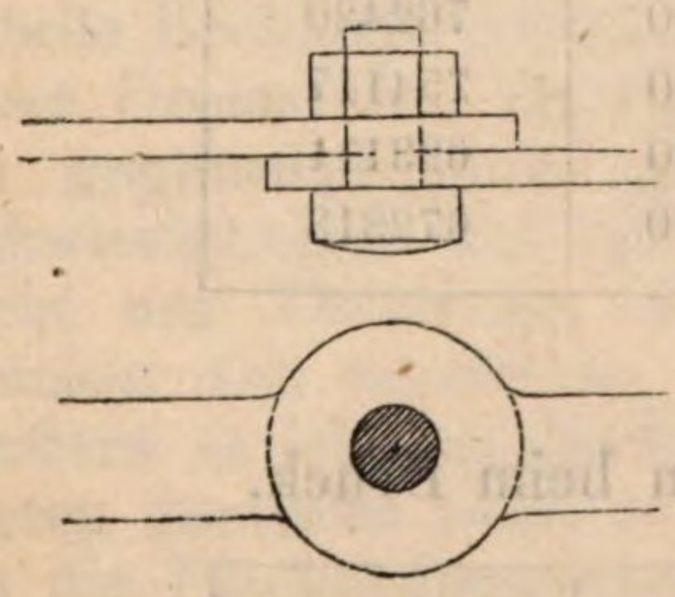
oder im Mittel:

$$E = 895042^k$$

wofür wir oben annähernd 900000^k gesetzt haben.

12. Die Festigkeit gegen Abscheeren wird in Anspruch genommen, wenn zwei Theile eines Körpers längs einer gemeinschaftlichen Ebene nach verschiedenen Richtungen gedrängt werden. Wenn der Körper frei wäre, so würde hiedurch eine Drehung hervorgebracht; ist aber diese Drehung durch andere Kräfte verhindert, so ist längs der gemeinschaftlich gedachten Trennungsfläche beider Körperfragmente ein Bestreben vorhanden, an einander vorbeizugleiten. Als einfachstes Beispiel führen wir einen Bolzen an, der zwei Kettenglieder verbindet, wie solches in Fig. 3 dargestellt ist; der in die Berechnungsfläche beider Kettenglieder fallende Bolzenquerschnitt ist auf Abscheeren in Anspruch genommen; auf gleiche Weise sind die Nieten aller Blechverbindungen angegriffen etc.

Fig. 3.



Denken wir uns allgemein in einem Körper, der von einer Kraft nach beliebiger Richtung angegriffen ist, eine Trennungsfläche, welche einen Winkel mit der Richtung der Kraft bildet und zerlegen wir diese Kraft in zwei Composanten senkrecht und parallel zur gedachten Trennungsfläche, so wirkt die senkrechte Composante auf absolute oder absolut rückwirkende Festigkeit und bringt eine Spannung hervor, welche nach Gleichung 20) zu berechnen ist. — Die parallel der Ebene gerichtete Composante nimmt den Körper auf Abscheeren in Anspruch, sie erzeugt innere Kräfte in dem Körper, welche wir Schubkräfte nennen wollen; dieselben sind gleichförmig über die Trennungsfläche vertheilt, so dass die Relation stattfindet:

$$P = \mathfrak{C} w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 23)$$

P bedeutet die längs der Trennungsebene wirkende Kraft, w den Querschnitt und $\mathfrak{C}$ die per Quadrateinheit wirkende Schubkraft, welcher wir den Namen Schubspannung beilegen wollen. Ist P_c diejenige Kraft, welche die Trennung wirklich hervorbringt, $\mathfrak{C}_o$ die dem Bruch entsprechende Schubspannung, so findet die Gleichung statt:

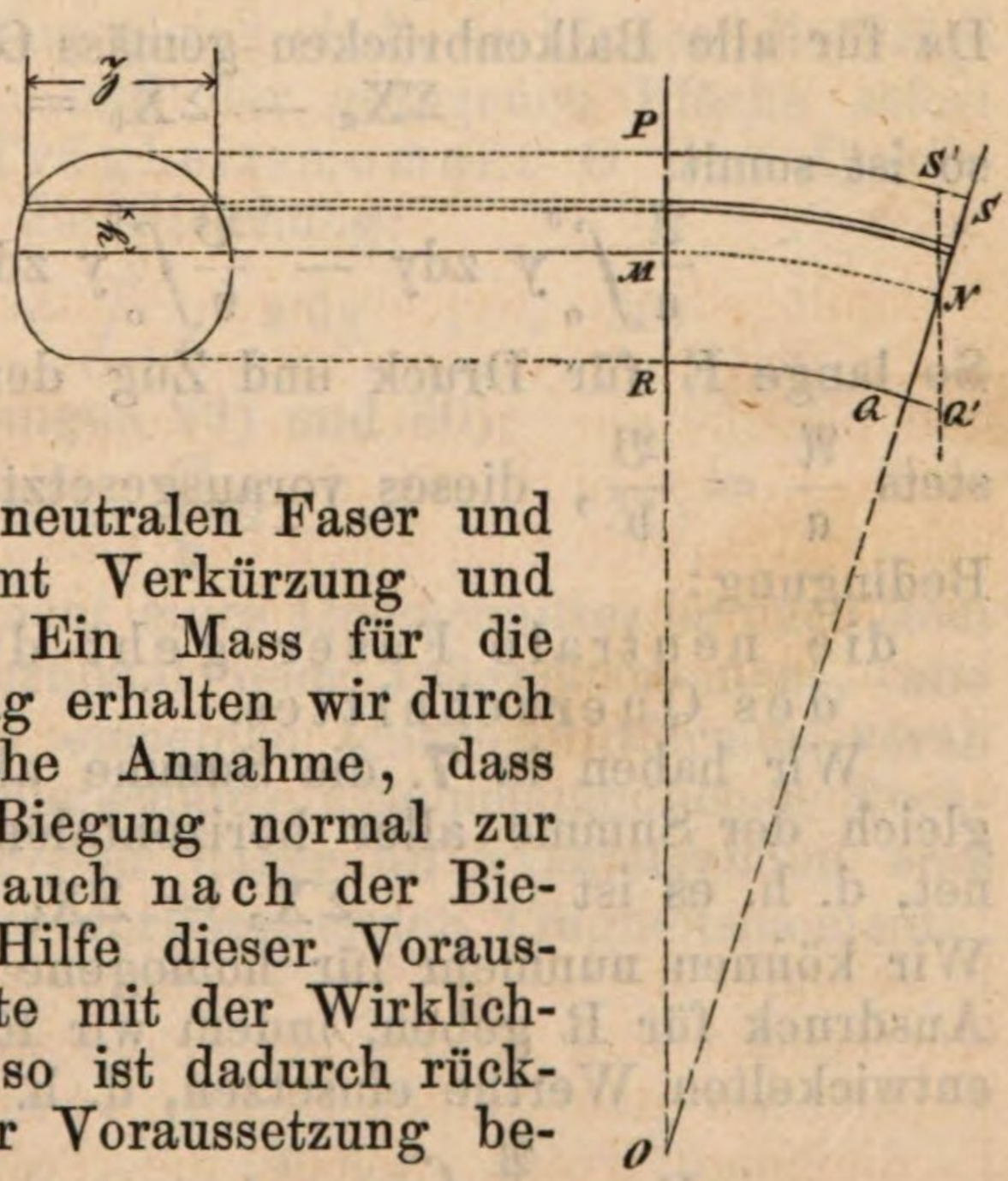
$$P_c = \mathfrak{C}_o w. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24)$$

Die Festigkeit gegen Abscheeren ist für Schmiedeisen im Allgemeinen gleich der absoluten Festigkeit gegen Zug zu setzen; so z. B. wenn es sich um die innerhalb eines homogenen Körpers thätigen Kräfte handelt. — Anders verhält es sich z. B. bei Bolzen, welche auf Abscheeren in Anspruch genommen sind, indem selten die ganze Querschnittfläche gleichförmig angegriffen ist, sondern nur ein bestimmter Bruchtheil der Abscheerungsfestigkeit in Rechnung genommen werden darf; die Widerstandsfähigkeit wird aber meist wiederum vermehrt durch die von dem fraglichen Bolzen hervorgerufene Reibung, wie weiter unten des Näheren dargestellt werden wird.

Die Festigkeit gegen Abscheeren ist übrigens auch verschieden in Folge der Textur der Materialien; so z. B. hat man beobachtet, dass Walzeisen senkrecht zur Richtung der Bahn, d. h. senkrecht zur Längenrichtung, grössere Abscheerungsfestigkeit zeigt, als nach der Längenrichtung selbst. — Beim Holz ist in Folge der Faserbildung die Verschiedenheit eine sehr bedeutende; das Holz spaltet sich parallel der Längenrichtung sehr leicht, während es einem seitlichen Abscheeren mit grosser Zähigkeit widersteht.

13. Die relative Festigkeit eines Stabes wird in Anspruch genommen, wenn eine zu seiner Längenrichtung senkrechte Kraft auf ihn einwirkt. Der Stab erleidet hiedurch eine Biegung, seine conkave Seite verkürzt sich, seine convexe Seite verlängert sich, innerhalb des Stabes liegt irgendwo eine Schichte, welche weder verkürzt noch verlängert wird und die „neutrale Faser“ heisst. Zwischen der neutralen Faser und den äussersten Fasern nimmt Verkürzung und Verlängerung allmählig zu. Ein Mass für die Verkürzung und Verlängerung erhalten wir durch die einigermassen willkürliche Annahme, dass Schnitte, welche vor der Biegung normal zur neutralen Faser sind, diess auch nach der Biegung bleiben. Da die mit Hilfe dieser Voraussetzung gewonnenen Resultate mit der Wirklichkeit genau übereinstimmen, so ist dadurch rückwärts die Zulässigkeit dieser Voraussetzung bestätigt.

Fig. 4.



Betrachten wir ein kleines Stück eines gebogenen Balkens, so werden im Längenschnitt (s. Fig. 4) alle vor der Biegung geraden Faserelemente nunmehr kleine Kreisbögen bilden, welche

aus einem und demselben Mittelpunkt beschrieben sind. — Linien vor der Biegung normal und parallel werden nun Normallinien auf allen Kreisbögen sein und zwei beliebig gezogene Normalen PR und SQ geben zu erkennen, um wie viel die einzelnen Elemente des zwischen ihnen gelegenen Balkenstücks verkürzt oder verlängert sind; gemäss Gleichung 22) gibt diese Verlängerung oder Verkürzung direkt die im Material herrschende Spannung, beziehungsweise Pressung an. Diese Spannung ist demgemäss proportional dem Abstand y von der neutralen Faser; wenn wir daher mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Spannung und Pressung in den äussersten Fasern, mit a und b die Entfernung dieser letztern von der neutralen Faser bezeichnen, so ist der in einem Element vom Querschnitt z.dy herrschende Zug $\mathfrak{A}_y$ oder Druck $\mathfrak{B}_y$ nach Gleichung 20) ausgedrückt durch

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_y &= \frac{\mathfrak{A}}{a} y \,.\, z\,dy \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ \mathfrak{B}_y &= \frac{\mathfrak{B}}{b} y \,.\, z\,dy \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned}\right\} \quad 25)$$

somit ist die Summe sämmtlicher Pressungen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X_a &= \frac{\mathfrak{A}}{a}\int_o^a y \,.\, z\,dy \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ \Sigma X_b &= \frac{\mathfrak{B}}{b}\int_o^b y \,.\, z\,dy \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned}\right\} \quad 26)$$

Da für alle Balkenbrücken gemäss Gleichung 10) stets

$$\Sigma X_a - \Sigma X_b = \Sigma X = o$$

so ist somit:

$$\frac{\mathfrak{A}}{a}\int_o^a y\; z\,dy - \frac{\mathfrak{B}}{b}\int_o^b y\; z\,dy = o \quad .\;.\;27)$$

So lange E für Druck und Zug denselben Werth hat, ist auch stets $\frac{\mathfrak{A}}{a} = \frac{\mathfrak{B}}{b}$, dieses vorausgesetzt, enthält Gleichung 27) die Bedingung:

die neutrale Faser geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes.

Wir haben in **7.** die Summe aller horizontalen Spannungen gleich der Summe aller horizontalen Pressungen mit R bezeichnet, d. h. es ist $\Sigma X_a = \Sigma X_b = R$

Wir können nunmehr für homogene Stäbe einen mathematischen Ausdruck für R geben, indem wir für ΣX_a und ΣX_b die so eben entwickelten Werthe einsetzen, d. h. es ist

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\mathfrak{A}}{a}\int_o^a y \,.\, z\,dy \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ R &= \frac{\mathfrak{B}}{b}\int_o^b y \,.\, z\,dy \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned}\right\} \quad 28)$$

Um diesen Ausdruck durch Zahlenwerthe darstellen zu können, muss die neutrale Faser vorab bekannt sein, d. h. es muss der Schwerpunkt des Querschnitts bestimmt worden sein.

Die Kräfte ΣX_a und ΣX_b bilden, wie nun schon mehrfach hervorgehoben, ein Gegenpaar, welches wir das Widerstandsmoment ΣXy des betreffenden Querschnitts genannt haben, und welches dem Angriffsmoment der äussern Kräfte $\mathfrak{M}$ numerisch gleich ist.

Um für ΣXy einen geordneten übersichtlichen Ausdruck zu erhalten, legen wir den Coordinatenursprung in den Schwerpunkt des Querschnitts und bilden die Summe der Kraftmomente

$$\text{für Zug} \quad \frac{\mathfrak{A}}{a}\int_o^a zy^2 . dy$$

$$\text{für Druck} \quad \frac{\mathfrak{B}}{b}\int_o^b zy^2 dy$$

wonach sich ergibt:

$$\mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{a}\int_o^a zy^2 . dy + \frac{\mathfrak{B}}{b}\int_o^b zy^2 dy \quad . \quad 29)$$

Den Ausdruck $\int zy^2 dy$ nennt man in der Mechanik das Trägheitsmoment der Fläche zy; dieser Ausdruck ist lediglich von der Gestalt des Querschnitts abhängig; wenn nun wiederum wie oben $\frac{\mathfrak{A}}{a} = \frac{\mathfrak{B}}{b}$ gesetzt werden darf (d. h. wenn die Elasticitätsmodule für Druck und Zug gleich sind), so können die Trägheitsmomente der gedrückten und der gezogenen Fläche sofort addirt werden und ist das Trägheitsmoment Θ des Querschnitts ausgedrückt durch die Gleichung:

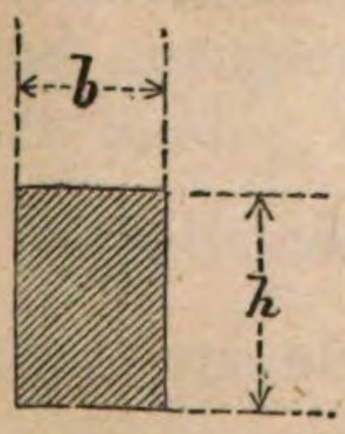
$$\Theta = \int_o^a y^2 . z\, dy + \int_o^b y^2 z\, dy \quad . \quad . \quad 30)$$

Es folgt nun aus den Gleichungen 29) und 30):

$$\mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{a}\Theta = \frac{\mathfrak{B}}{b}\Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 31)$$

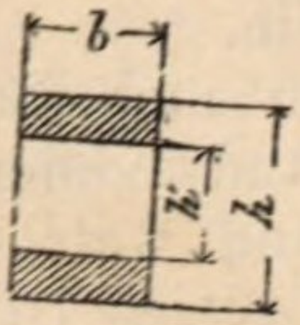
14. Das Widerstandsmoment eines Querschnittes ist nach dem Vorhergehenden direct proportional dem Trägheitsmoment, und indem man letzteres für die einzelnen Querschnittformen vorab bestimmt, so sind für diese Querschnitte alle umständlichen Rechnungen abgeschnitten; wir geben daher im Nachfolgenden eine Zusammenstellung der häufiger vorkommenden Trägheitsmomente:

Fig. 5.



Rechteck. $\Theta = \frac{1}{12} bh^3$

Fig. 6.



Offener en. $$\Theta = \frac{1}{12} b (h^3 - h,^3)$$

Fig. 7

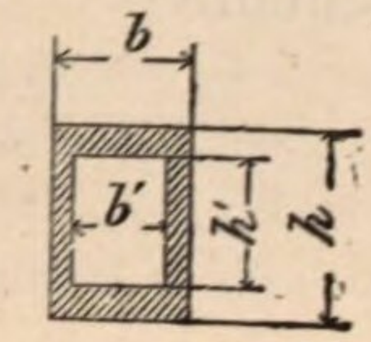


Fig. 8.

Symmetrische Kasten- und Doppel-⊤ Form.

$$\Theta = \frac{1}{12} (bh^3 - b,h,^3)$$

$$\Theta = \frac{1}{12} (bh^3 - [b - \delta] h,^3)$$

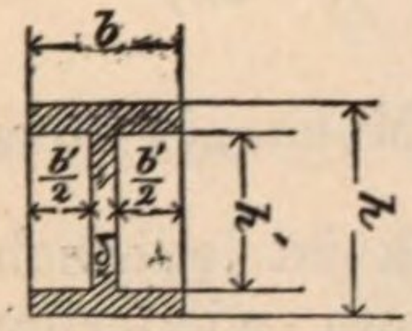
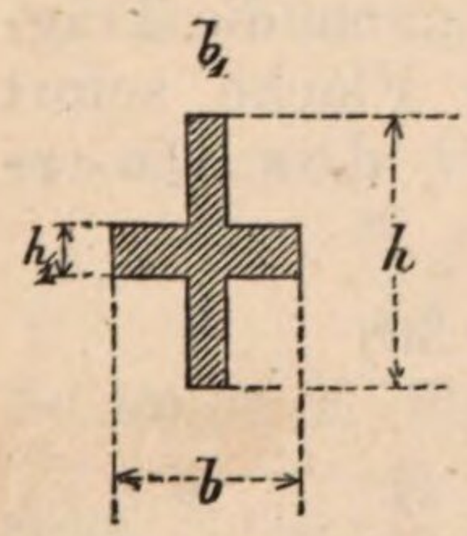
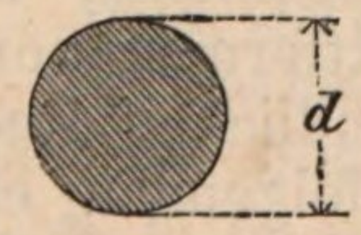


Fig. 9.



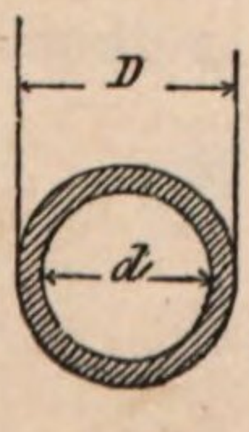
Kreuzform. $$\Theta = \frac{1}{12} (b_1 h^3 + [b - b_1] h_1^3)$$

Fig. 10.



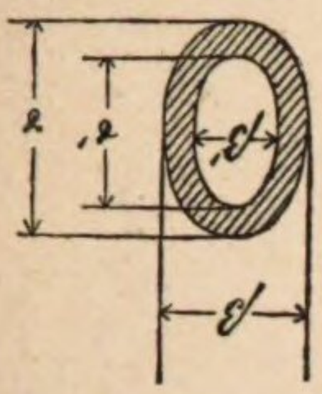
$$\Theta = \frac{\pi d^4}{64}$$

Fig. 11.



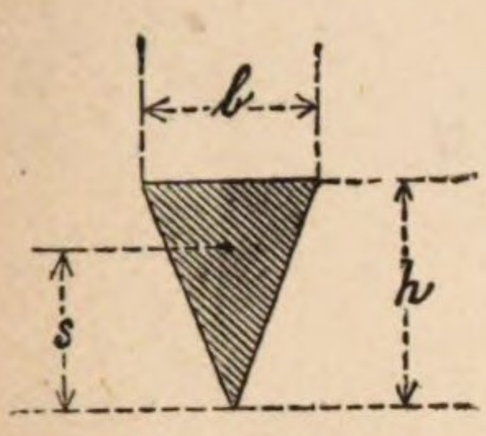
$$\Theta = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4))$$

Fig. 12.



$$\Theta = \frac{\pi}{64} (\alpha^3\beta - \alpha,^3\beta)$$

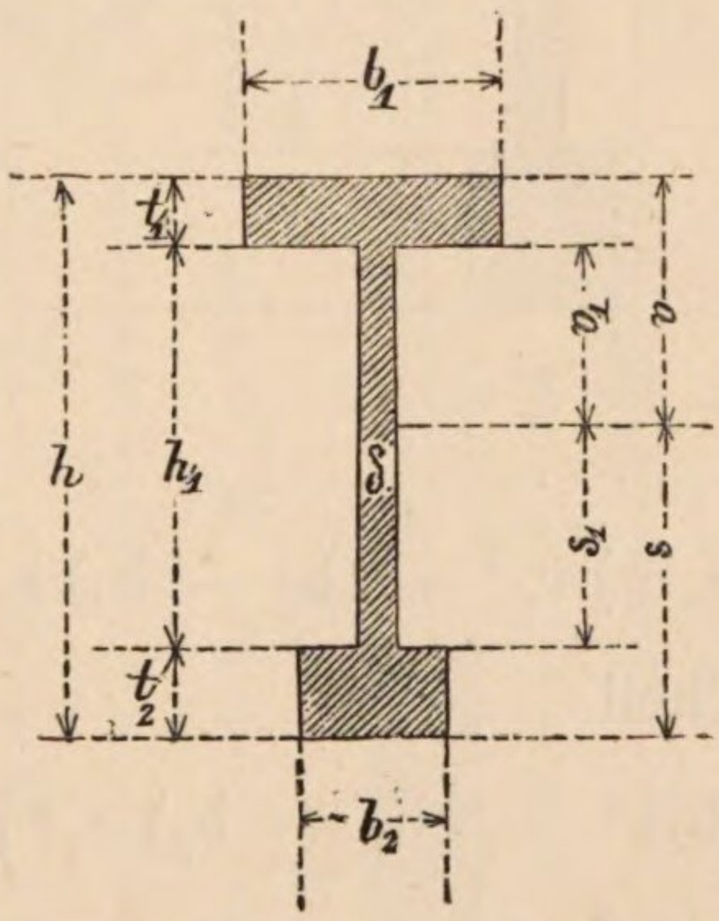
Fig. 13.



$$s = \frac{2}{3} h$$

$$\Theta = \frac{1}{36} bh^3$$

Fig. 14. Doppel-⊤Form.

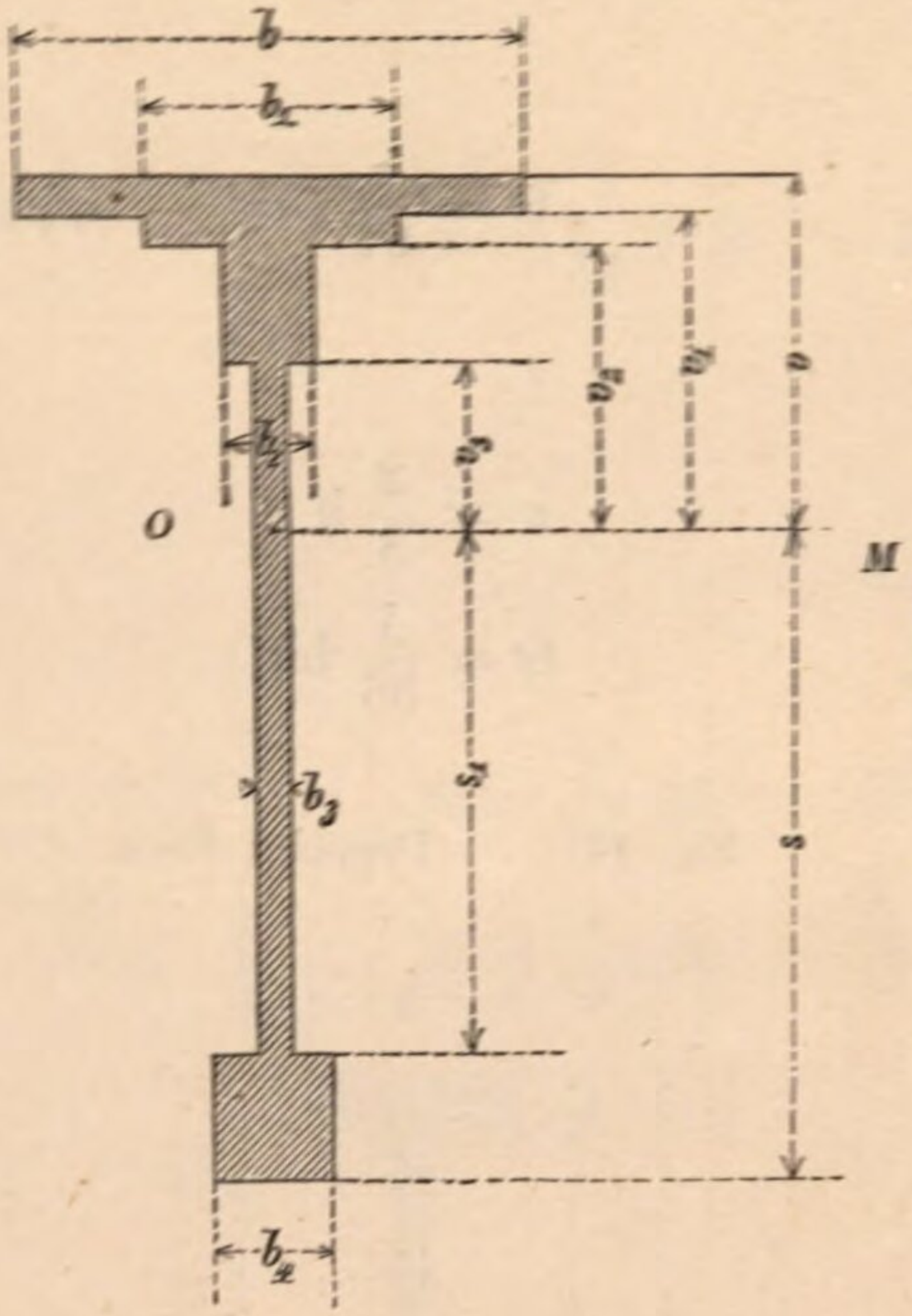


$$s = \frac{b_2 t_2 \cdot \frac{t_2}{2} + h_1 \delta \cdot \frac{h_1 + 2t_2}{2} + b_1 t_1 \frac{t_1 + 2(h_1 + t_2)}{2}}{b_1 t_1 + \delta h_1 + b_2 t_2}$$

$$\Theta = \frac{1}{3}\left[b_1 v^3 - (b - \delta) v_1^3 + b_2 s^3 - (b_2 - \delta) s_1^3\right]$$

Beispielsweise soll nun das Trägheitsmoment für einen complicirteren Querschnitt bestimmt werden (s. Fig. 15.). — Wir nehmen an, der Schwerpunkt des Querschnittes sei bereits gefunden und die Linie OM sei durch diesen Punkt gelegt. Wir finden dann das Trägheitsmoment durch Addition der Trägheitsmomente des gedrückten und gezogenen Theils, wie solche durch die Linie OM abgeschieden sind. Wir haben für den obern Theil, indem man von dem Trägheitsmoment $\int_0^v by^2 dy = \frac{1}{3} bv^3$ des Vierecks $b \cdot v$ die Trägheitsmomente der hohlen Räume abzieht,

Fig. 15.



$$\Theta_v = \frac{1}{3}\left(bv^3 - (b - b_1)\,v_1{}^3 - (b_1 - b_2)\,v_2{}^3 - (b_2 - b_3)\,v_3{}^3\right) \text{ I.}$$

und für den untern Theil

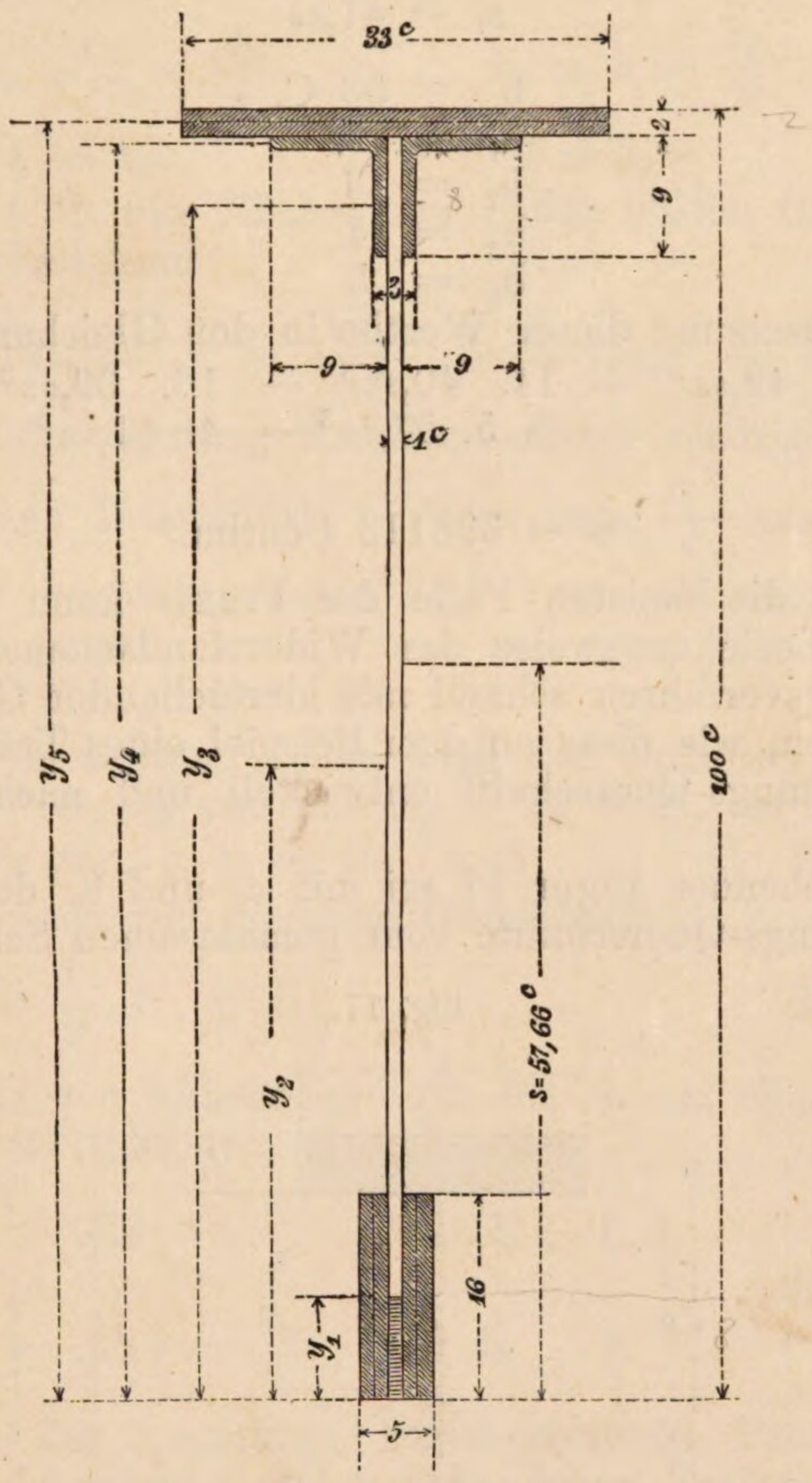
$$\Theta_s = \frac{1}{3}\left(b_4 s^3 - (b_4 - b_3)\,s_1{}^3\right) \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

das Trägheitsmoment Θ des ganzen Querschnitts ist aber

$$\Theta = \Theta_v + \Theta_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

Um dieses Verfahren an einem Zahlenbeispiel zu zeigen, sei unter Beibehaltung der vorstehenden Anordnung des Querschnitts die Höhe $H = v + s = 100$ Cent., die Dicke der Mittelrippe $b_3 = 1$ Cent.; das untere Band habe (inclus. Mittelrippe) eine Breite von $b_4 = 5$ Cent. und eine Höhe von 16 Cent.; die obere Gurtung, bestehend aus 2 Winkeln und dem breiten horizontalen Band, habe 100 Quadrat-Centim. Querschnitt; nämlich zwei Winkel von 9 Cent. Schenkelbreite und 1 Cent. Dicke, gibt je 17, zusammen 34 Quadrat-Centim., während das oberste Band 33 Cent. breit und 2 Cent. dick ist; die untere Gurtung hat dann $^4/_5$ des Querschnitts der oberen Gurtung. — Diese Maasse sind in nachstehender Figur 16. eingetragen und muss nun zunächst der Schwerpunkt dieser Fläche bestimmt werden. — Zu diesem Behufe sind die Abstände y der einzelnen Abtheilungsschwerpunkte von der untern Kante, dessgleichen der Abstand s der Gesammtfläche

Fig. 16.



in der Figur eingetragen. Nach der Definition des Schwerpunktes findet die Relation Statt:

$$\begin{aligned} \text{s. (Gesammtfläche)} = {} & 33.\ 2.\ y_5 + 18.\ 1.\ y_4 \\ & + 8.\ 2.\ y_3 + 98.\ 2.\ y_2 \\ & + 16.\ 4.\ y_1 \end{aligned}$$

woraus, indem man die Flächeninhalte ausrechnet und die Werthe für die einzelnen y einsetzt, folgt:

$$s = \frac{15107}{262} = 57{,}_{66}\ \text{Cent.},$$

wonach für die einzelnen v und s der Figur 15 folgt:

$$\begin{aligned} v &= 42{,}_{33}\ \text{C.} \\ v_1 &= 40{,}_{33} \\ v_2 &= 39{,}_{33} \\ v_3 &= 31{,}_{33} \end{aligned}$$

$$s = 57{,}_{66}\ \text{C.}$$
$$s_1 = 41{,}_{66}$$

ferner ist

$$b = 33\ \text{C.}$$
$$b_1 = 19$$
$$b_2 = 3$$
$$b_3 = 1$$
$$b_4 = 5$$

und nach Einsetzung dieser Werthe in den Gleichungen I.—III.:

$$\Theta = \frac{1}{3}\left(33.\ 42{,}_{33}{}^3 - 14.\ 40{,}_{33}{}^3 - 16.\ 39{,}_{33}{}^3 - 2.\ 31{,}_{33}{}^3 + 5.\ 57{,}_{66}{}^3 - 4.\ 41{,}_{66}{}^3\right)$$

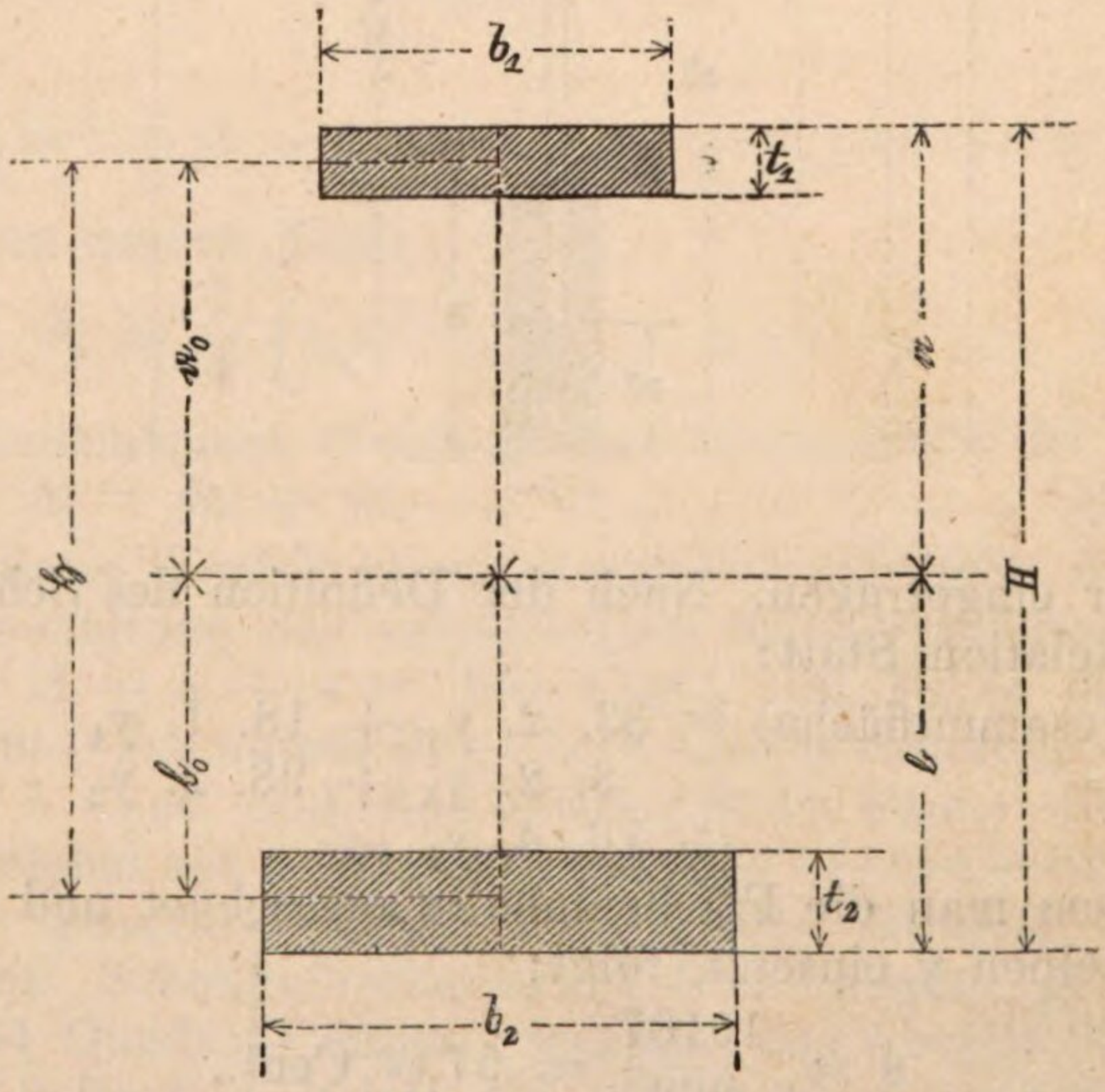
somit

$$\Theta = 398113\ \text{Centim.}^4$$

15. Für die meisten Fälle der Praxis kann das Trägheitsmoment Θ, beziehungsweise das Widerstandsmoment ΣXy durch ein Näherungsverfahren schnell mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden, wie diess an dem Beispiel eines Trägers mit rechteckigem Gurtungs-Querschnitt entwickelt und nachgewiesen werden soll.

In beistehender Figur 17 sei mit a_o und b_o der Abstand der beiden Gurtungs-Querschnitte vom gemeinsamen Schwerpunkt der

Fig. 17.



Gesammtfläche bezeichnet; die Bedeutung der übrigen Buchstaben ist aus der Figur selbst ersichtlich.

Das Trägheitsmoment dieses Trägers ist

$$\Theta = \frac{1}{3}\left[b_1\ (a^3 - [a - t_1]^{\ 3}) + b_2\ (b^3 - [b - t_2]^{\ 3})\right]$$

substituirt man in diesen Gleichungen

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} - \frac{t_1}{2} \qquad \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b} - \frac{t_2}{2}$$

$$\Omega_\mathfrak{a} = t_1 \mathfrak{b}_1 \qquad \Omega_\mathfrak{b} = t_2 \mathfrak{b}_2$$

so dass $\Omega_\mathfrak{a}$ und $\Omega_\mathfrak{b}$ die Flächeninhalte der beiden Gurtungen bezeichnen, so erhält man

$$\Theta = \frac{1}{3}\left[\Omega_\mathfrak{a}\ (3\mathfrak{a}_0{}^2 + \frac{t_1{}^2}{4}) + \Omega_\mathfrak{b}\ (3\mathfrak{b}_0{}^2 + \frac{t_2{}^2}{4})\right]$$

Wenn nun die Gurtung verhältnissmässig niedrig ist, im Vergleich zur ganzen Trägerhöhe, so kann man $\frac{t_1{}^2}{4}$ und $\frac{t_2{}^2}{4}$ gegenüber von $3\mathfrak{a}_0{}^2$ beziehungsweise $3\mathfrak{b}_0{}^2$ vernachlässigen und erhält als hinreichend genau

$$\Theta = \Omega_\mathfrak{a}\ \mathfrak{a}_0{}^2 + \Omega_\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}_0{}^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 32)$$

Berücksichtigt man ferner, dass nach der Definition des Schwerpunkts $\Omega_\mathfrak{a}\ \mathfrak{a}_0 = \Omega_\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}_0$ und dass $\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{H}$, so ist

$$\Theta = \Omega_\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{a}_0 \mathfrak{H} = \Omega_\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{b}_0 \mathfrak{H} \quad . \ . \ . \ . \ 33)$$

und für Gurtungen von gleichem Querschnitt

$$\Theta = \frac{1}{2}\,\Omega \,.\, \mathfrak{H}^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 34)$$

Wenn man den Näherungswerth für Θ aus Gleichung 33) in die Gleichung 29) einsetzt, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} = \Sigma \mathfrak{X}\mathfrak{y} &= \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}} \,.\, \mathfrak{A} \,.\, \Omega_\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{H} \\ \mathfrak{M} = \Sigma \mathfrak{X}\mathfrak{y} &= \frac{\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{b}} \,.\, \mathfrak{B} \,.\, \Omega_\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{H} \end{aligned}\right\} \,.\ 35)$$

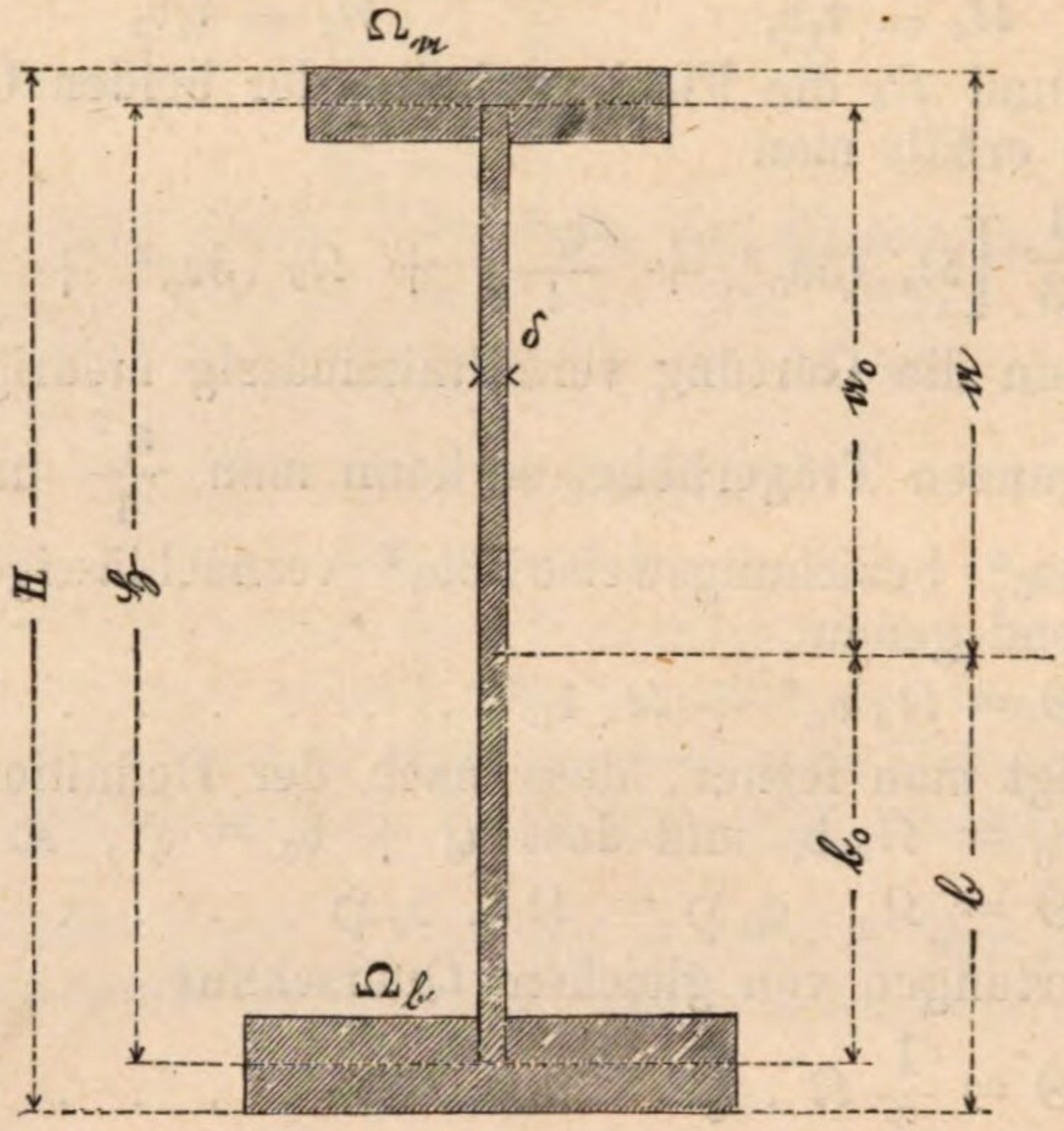
wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Spannung, beziehungsweise Pressung in den äussersten im Abstande $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ befindlichen Fasern bezeichnen.

Wir hätten Gleichung 35) auch unmittelbar erhalten, indem wir uns Druck und Zug je im Schwerpunkte der betreffenden Gurtung vereinigt gedacht hätten; indem man sich Rechenschaft darüber gibt, wie nahe der Gurtungsschwerpunkt im vorliegenden Falle dem Mittelpunkt von Druck und Zug liegt, erhält man eine weitere Anschauung von dem unbedeutenden Einfluss, den die Vernachlässigung der Glieder $\frac{t_1{}^2}{4}$ und $\frac{t_2{}^2}{4}$ ausübt.

So oft es gestattet ist, die längs einer Gurtung wirkenden Kräfte im Schwerpunkt derselben sich vereinigt zu denken, so ist auch die Gestalt der Gurtung ohne weiteren Einfluss und gelten die Gleichungen 32) bis 35) für alle Arten von Querschnitten, sobald nur die Gurtungshöhe gegenüber der ganzen Trägerhöhe hinreichend klein ist.

16. Wenn man unter sonst gleichen Voraussetzungen, wie in der vorhergehenden Nummer, einen Träger mit voller, dünner

Fig. 18.



Wand betrachtet, und sich das Trägheitsmoment der beiden Gurtungen nach der Annäherungsformel Gleichung 32) gebildet denkt, so erhält man das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts dadurch, dass man zu den Trägheitsmomenten der Gurtungen die Trägheitsmomente der gedrückten und der gezogenen Mittelrippe addirt; es ist

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \Omega_a \mathfrak{a}_0^2 + \Omega_b \mathfrak{b}_0^2 + \frac{1}{3}\,\delta \,.\, \mathfrak{a}_0^3 + \frac{1}{3}\,\delta \mathfrak{b}_0^3 \\ \Theta &= \mathfrak{a}_0^2 \left(\Omega_a + \frac{1}{3}\,\delta \mathfrak{a}_0\right) + \mathfrak{b}_0^2 \left(\Omega_b + \frac{1}{3}\,\delta \mathfrak{b}_0\right. \end{aligned}\right\} \quad 36)$$

Wir denken uns der Einfachheit halber die Mittelrippe gerade bis zum Gurtungsschwerpunkt reichend, was in der Praxis wenig abweicht; derjenige Theil der Mittelrippe, der über den Gurtungsmittelpunkt etwa hinausreicht, wird, insofern er von Belang ist, zum Gurtungsquerschnitt gerechnet.

Sind die beiden Gurtungen von gleich grossem Querschnitt, so ist $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_0 = \frac{\mathfrak{H}}{2}$ und

$$\Theta = \frac{\mathfrak{H}^2}{2}\left(\Omega + \frac{1}{6}\,\delta \mathfrak{H}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 37)$$

Für Träger, deren Gurtungen gleichen Querschnitt haben, wird also der Einfluss der Mittelrippe auf die Tragfähigkeit da-

durch berücksichtigt, dass man jedem Gurtungsquerschnitt $^1/_6$ des Querschnitts der Mittelrippe hinzufügt und nunmehr das Trägheitsmoment eines offenen Balkens (ohne Mittelrippe) anschreibt. — Dieser Satz ist für Träger mit ungleichen Gurtungen nicht mehr genau. — Wenn man nämlich die Gleichungen 32) und 36) vergleicht, und sich einen offenen Balken denkt, dessen Gurtungen die Querschnitte $\Omega_a + \frac{1}{3}\,\delta a_0$, beziehungsweise $\Omega_b + \frac{1}{3}\,\delta b_0$ haben, so scheint zwar der hienach nach Gleichung 32) gebildete Werth von Θ identisch mit dem aus Gleichung 36) gefundenen zu sein.

Diess ist jedoch nicht der Fall, sondern es haben die Ordinaten a_0 und b_0 je andere Werthe; in Gleichung 36) ist vorausgesetzt, dass der Schwerpunkt der ganzen Querschnittfläche bestimmt sei, wofür annähernd die Relation gilt

$$a_0\,(\Omega_a + \frac{1}{2}\,\delta a_0) = b_0\,(\Omega_b + \frac{1}{2}\,\delta b_0) \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

nach Gleichung 32) ist derselbe aber bestimmt durch die Relation

$$a_0\,(\Omega_a + \frac{1}{3}\,\delta a_0) = b_0\,(\Omega_b + \frac{1}{3}\,\delta b_0) \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Die beiden Relationen I. und II. weichen nun in der Wirklichkeit sehr wenig von einander ab, so dass man für die gewöhnlichen Fälle der Praxis in Gleichung 36) die Relation II. einsetzen darf und als meist ausreichende Näherungsformel für den in Fig. 18 dargestellten Querschnitt erhält

$$\Theta = \mathfrak{H}\,(\Omega_a + \frac{1}{3}\,\delta a_0) = \mathfrak{H}\,(\Omega_b + \frac{1}{3}\,\delta b_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 38)$$

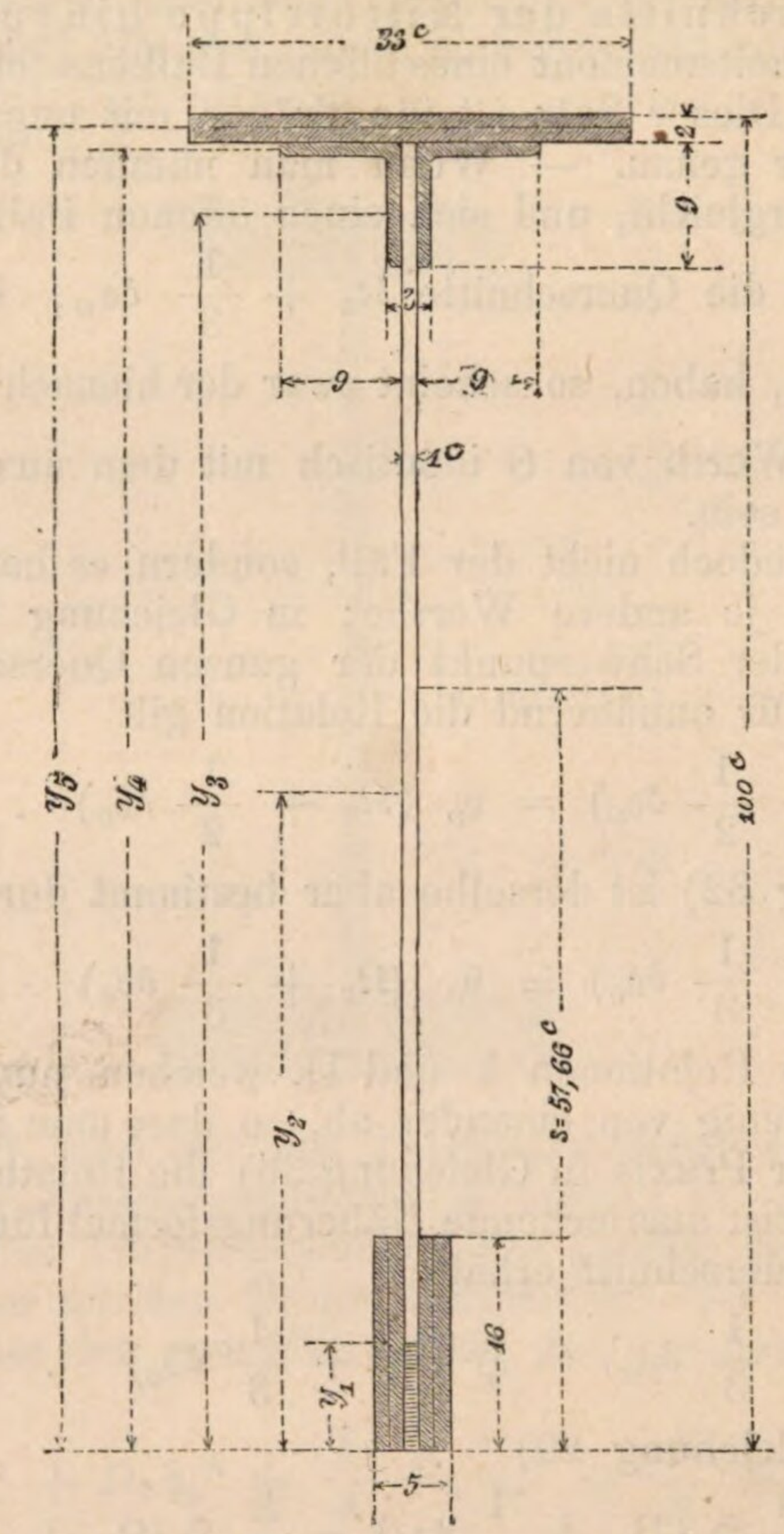
woraus nach Gleichung 29)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{a}\,\mathfrak{H}\,(\Omega_a + \frac{1}{3}\,\delta a_0) = \frac{\mathfrak{A}}{a}\,\mathfrak{H}\,(\Omega_b + \frac{1}{3}\,\delta b_0 \\ \mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{B}}{b}\,\mathfrak{H}\,(\Omega_b + \frac{1}{3}\,\delta b_0) = \frac{\mathfrak{B}}{b}\,\mathfrak{H}\,(\Omega_a + \frac{1}{3}\,\delta a_0 \end{aligned}\right\} \quad 39)$$

17. Wir zeigen die Anwendung der Formel 38) und zugleich den Grad ihrer Genauigkeit an einem Zahlenbeispiel.

Für den in nachstehender Figur 16 dargestellten Querschnitt sei der Schwerpunkt der Gesammtfläche auf irgend eine Art gefunden; wir wissen aus der früheren Berechnung in **14.**, dass er 42,33 Centim. von der obersten Gurtungskante absteht, indem wir hier wie oben zunächst von der etwaigen Verschwächung der Querschnitte durch Nietlöcher etc. absehen. — Den Druckmittelpunkt denken wir uns mit der untern Kante des obern Gurtungsbands zusammenfallend, der Zugmittelpunkt ist im Mittelpunkt des untern Bands anzunehmen; es ist alsdann

Fig. 16.



$$\mathfrak{b}_0 = 40{,}33$$
$$\mathfrak{a}_0 = 49{,}66$$
$$\mathfrak{H} = 90{,}0\ ^{c}$$

ferner ist

$$\Omega_a + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{a}_0 = 72 + \frac{49{,}66}{3} = 88{,}55$$

$$\Omega_b + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{b}_0 = 100 + \frac{40{,}33}{3} = 113{,}44$$

woraus sich ergibt

$$\Theta = 90 \times 88{,}55 \times 49{,}66 = 395765{,}370$$

oder $$\Theta = 90 \times 113{,}44 \times 40{,}33 = 411753{,}168$$

im Mittel $$\Theta = 403759{,}269$$

Vergleicht man dieses Resultat mit der mathematisch genauen Berechnung in **14.**, so ergibt sich eine mittlere Differenz von etwa 1 pCt., welche Annäherung für die meisten praktischen Fälle ausreichend ist. — Wir haben aber absichtlich ein Beispiel eines sehr unsymmetrischen Querschnitts gewählt, bei dem zudem die eine Gurtung verhältnissmässig ziemlich hoch ist; es lässt sich hieraus der Schluss ziehen, wie verschwindend die Ungenauigkeit wird, wenn beide Gurtungen ziemlich gleich gross und insbesondere beide gegenüber dem ganzen Träger verhältnissmässig niedrig sind.

18. Dieselbe Betrachtung, mittelst welcher man die Widerstandsvermögen berechnet, lehrt auch für jede Belastung die Gestalt der neutralen Faser, die sogenannte elastische Linie, aufzufinden. Bezeichnen wir nämlich in der schon oben erklärten Figur 4 mit $OM = \varrho$ den Krümmungshalbmesser der neutralen Faser am fraglichen Balkenelement, nennen wir dl die Länge des Elements, $d\lambda$ die Verlängerung der am meisten gezogenen äusseren Faser, so ist, wie aus der Figur 4 zu ersehen:

$$\varrho : a = dl : d\lambda$$

es ist aber nach Gleichung 14) $\mathfrak{A} = \frac{d\lambda}{dl} E$

und nach Gleichung 20) $\frac{\mathfrak{A}}{a} = \frac{\Sigma Xy}{\Theta}$

somit ist: $\Sigma Xy = \frac{\Theta E}{\varrho}$ . . . . . 40)

drücken wir nun den Krümmungshalbmesser ϱ nach Anleitung der analystischen Geometrie durch die Coordinaten der Kurve selbst aus:

$$\varrho = \frac{\left(1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

und bemerken, dass für die kleinen Biegungen, die wir voraussetzen $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2$ stets sehr klein gegenüber der Einheit ist, so folgt aus dieser Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

und endlich nach Gleichung 21):

$$\frac{d^2y}{dx^2} E\Theta = \Sigma Xy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 41)$$

dieses ist die Fundamentalgleichung der elastischen Linie. So oft es möglich ist, den Ausdruck $\frac{\Sigma Xy}{E\Theta}$ zweimal zu integriren, so oft ist die Gestalt der neutralen Faser gefunden. Die Rechnung wird ziemlich einfach, wenn das Trägheitsmoment Θ auf die ganze Länge des Stabes constant ist.

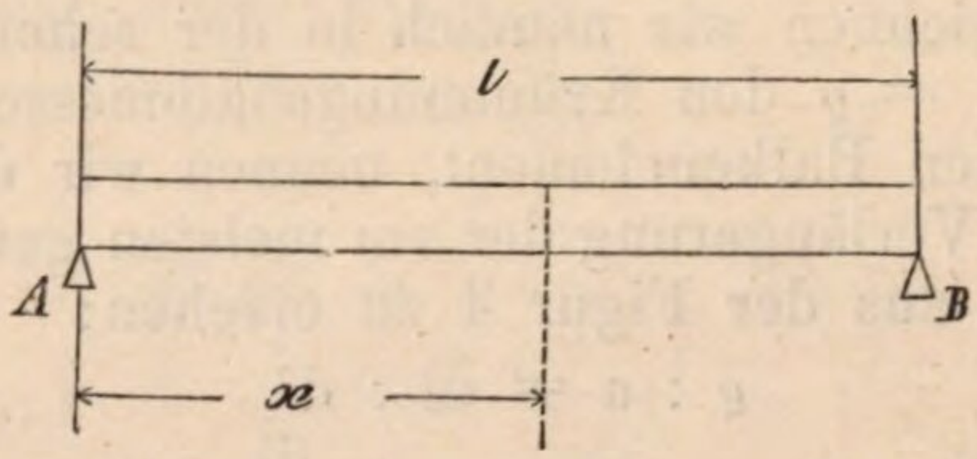
19. Wir wollen die Anwendung der Gleichung an einem einfachen Beispiele zeigen. Ein an beiden Enden aufliegender Balken sei auf seine ganze Länge mit q belastet, sein Querschnitt sei durchweg derselbe. Wir legen den Coordinatenursprung in den Punkt A, so ist:

$$A = B = \frac{ql}{2}$$

ferner nach Gleichung 14):

$$\Sigma Y = A - qx = \left(\frac{l}{2} - x\right) q$$

Fig. 19.



und nach Gleichung 15):

$$\Sigma Xy = \frac{qx^2}{2} + x\Sigma Y = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

und somit nach Gleichung 22):

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

und durch Integriren:

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = \frac{q}{2}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \text{Const.}$$

Die Constante bestimmt sich dadurch, dass für $x = \frac{l}{2}$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = o$ ist, woraus folgt

$$\text{Const.} = -\frac{q}{2}\,\frac{l^3}{12}$$

Diess substituirt, gibt durch wiederholtes Integriren:

$$E\Theta \,.\, y = \frac{q}{24}\,(2lx^3 - l^3x - x^4)$$

wobei die Constante = o ist, da für x = o auch y = o sein muss. Diess ist für den vorliegenden Fall die Gleichung der elastischen Linie und wir finden die grösste Einsenkung in der Mitte:

$$f = -\frac{5}{384}\,\frac{ql^4}{E\Theta} \quad . \quad . \quad . \quad 42)$$

Hätte man Θ proportional ΣXy wachsen lassen, so wäre ein constanter Halbmesser ϱ entstanden

und zwar $$\varrho = \frac{\Theta E}{\Sigma X y};$$

wenn man daher dem Balken in der Mitte denselben Querschnitt gegeben hätte, wie oben, dagegen denselben nach den Enden hin hätte abnehmen lassen, so wäre

$$\varrho = \frac{\Theta E \,.\, 8}{q l^2}$$

geworden und es wäre somit die Senkung gemäss den Eigenschaften des Kreises gewesen:

$$f_1 = \frac{1}{64} \frac{q l^2}{E \Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 43)$$

Diese Gleichung 43^a gibt eine Senkung f_1, welche $^6/_5$ derjenigen Senkung f beträgt, welche durch Gleichung 42) für einen Balken von gleichförmiger Stärke erhalten wird.

20. Die Gestalt der neutralen Faser für Balken, welche auf mehreren Stützpunkten aufliegen, bestimmt sich in ähnlicher Weise wie in Nr. **19.**, indem man für jede Oeffnung die Gleichung 41) anschreibt und zweimal integrirt. Die Rückwirkungen der Stützpunkte können jedoch hier nicht unmittelbar bestimmt werden, wie bei dem auf 2 Widerlagern aufliegenden Balken, weil die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den äussern Kräften und der Rückwirkung der Auflager sich auf die Gleichungen 2) und 4) reduciren, in welchen nur zwei Grössen unbekannt sein dürfen. Die nachfolgende Betrachtung zeigt, wie diese unbekannten Auflagedrücke sich durch die Entwicklung der Gleichung der elastischen Linie mit ergeben. Betrachtet man einen Balken mit n Oeffnungen und führt als Unbekannte ausser den Auflagedrücken noch die Winkel der elastischen Linie auf den Stützpunkten und endlich die Constanten bei der Integration ein, so hat man Unbekannte:

Auflagerdrücke	$n + 1$
Tangentenwinkel	$n + 1$
Constante deren je zwei für jede Oeffnung für die zweimalige Integration nothwendig werden	$2n$
zusammen Unbekannte	$4n + 2$

Zu Bestimmung dieser Unbekannten hat man folgende Relationen: die Biegungskurve jeder Oeffnung muss durch die beiden Auflagerpunkte gehen und muss an jedem Stützpunkt den oben eingeführten Winkel mit dem Horizont bilden. Man hat daher für jede Oeffnung 4 Gleichungen und ausserdem die beiden Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den äussern Kräften und den Auflagerreaktionen, somit im Ganzen $4n + 2$ Gleichungen zu Bestimmung der vorhandenen $4n + 2$ Unbekannten.

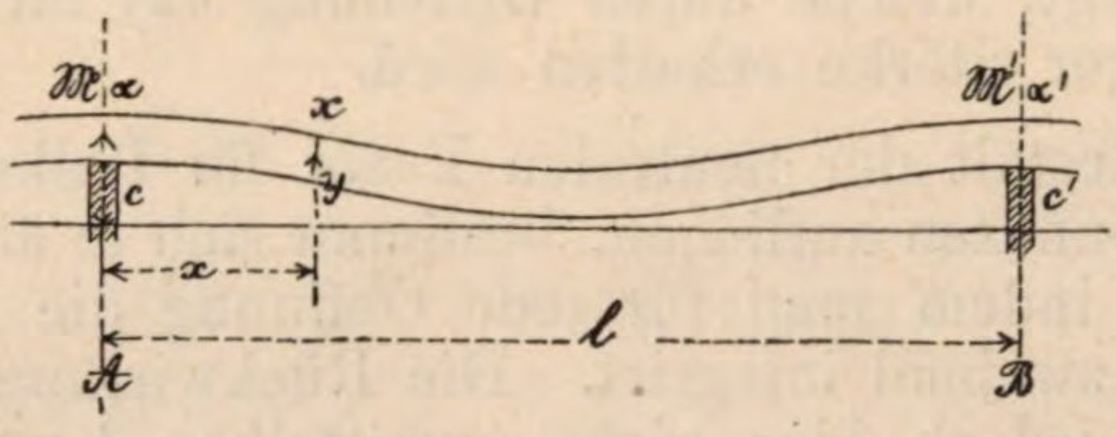
Durch die oben angedeutete Methode ist man daher im Stande,

für jede beliebige Anzahl von Oeffnungen die Gestalt der neutralen Linie sowohl, als auch die unbekannten Auflagerdrücke zu bestimmen.

21. Wegen der vielen zu eliminirenden Unbekannten wird die vorstehend beschriebene Methode sehr zeitraubend und ist der folgenden Methode des Ingenieur Clapeyron, welche auf weit kürzerem Wege zum Ziele führt, der Vorzug zu geben. — Wir entnehmen diese Methode dem Werke: *Molinos et Pronnier, Construction des ponts metalliques,* wobei wir das Verfahren zum Gebrauch für spätere Anwendung verallgemeinern.

Betrachten wir irgend eine der n Spannweiten eines Trägers und bezeichnen wir mit

Fig. 20.



A und B die Auflagerdrücke auf den Stützpunkten,
l die Spannweite,
$\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ die Angriffsmomente der äusseren Kräfte auf den Auflagern A und B,
α und α' die Winkel der neutralen Linie daselbst mit dem Horizont,
c und c' die Ordinaten der Stützpunkte,
q die Belastung per Längeneinheit,
ferner mit
$\mathfrak{M}_x$ das Angriffsmoment in einem Punkt, dessen Abscissen und Ordinaten x und y bezeichnen, während die Axe der y durch den Auflagerpunkt A geht, so ist:

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M} + \frac{qx^2}{2} - Ax$$

und indem man diesen Werth von $\mathfrak{M}_x$ in Gleichung 41) einsetzt:

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M} + \frac{qx^2}{2} - Ax \quad \ldots\ldots\ldots \text{I.}$$

Ausserdem besteht zwischen A, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ folgende Relation, wenn man B als Mittelpunkt der Momente annimmt:

$$Al - \mathfrak{M} + \mathfrak{M}' - \frac{ql^2}{2} = 0$$

woraus

$$A = \frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.}$$

und durch Substitution in obige Gleichung I.:

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - \left(\frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{l}\right) x + \mathfrak{M} \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

Wird diese Gleichung integrirt und berücksichtigt, dass für $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = \alpha$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha + \frac{qx^3}{6E\Theta} - \left(\frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{l}\right) \frac{x^2}{2E\Theta} + \frac{\mathfrak{M}x}{E\Theta} \quad . \quad \text{IV.}$$

und für $x = l$

$$\alpha' = \alpha - \frac{ql^3}{12E\Theta} + (\mathfrak{M} + \mathfrak{M}') \frac{l}{2E\Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{V.}$$

Integrirt man Gleichung IV. nochmals, so wird unter Berücksichtigung, dass für $x = 0$, $y = c$

$$y = c + \alpha x + \frac{qx^4}{24E\Theta} - \left(\frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{l}\right) \frac{x^3}{6E\Theta} + \frac{\mathfrak{M}x^2}{2E\Theta}$$

und da für $x = l$, $y = c'$ sein muss,

$$c' = c + \alpha l + \frac{ql^4}{24} - \left(\frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{l}\right) \frac{l^3}{6E\Theta} + \frac{\mathfrak{M}C}{2E\Theta}$$

woraus man erhält:

$$\alpha = \frac{ql^3}{24E\Theta} - \frac{l}{6E\Theta} (2\mathfrak{M} + \mathfrak{M}') + \frac{c' - c}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{VI.}$$

und dieser Werth in Gleichung V. eingesetzt:

$$\alpha' = -\frac{ql^3}{24E\Theta} + \frac{l}{6E\Theta} (\mathfrak{M} + 2\mathfrak{M}') + \frac{c' - c}{l} \quad . \quad . \quad \text{VII.}$$

Letztere beiden Gleichungen enthalten die 4 Unbekannten $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, α und α'; schreibt man ähnliche Gleichungen für jede Oeffnung des Trägers an, so erhält man $2n$ Gleichungen. Andererseits beträgt die Anzahl der Unbekannten, wenn man bedenkt, dass für die Endstützen $\mathfrak{M} = 0$ ist und für die Mittelstützen α und $\mathfrak{M}$ für je zwei Oeffnungen gemeinschaftlich sind

$n - 1$ unbekannte Momente,
$n + 1$ Auflagerwinkel,
zusammen $2n$ Unbekannte.

Die Elimination der Unbekannten kann sehr vereinfacht werden, wenn man Hülfsgrössen in die Gleichungen VI. und VII. einführt.

Setzt man nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{l^3}{24E\Theta}\chi & \alpha' &= \frac{l^3}{24E\Theta}\psi \\ \mathfrak{M} &= {}^2/_8\,\mu l^2 & \mathfrak{M}' &= {}^2/_8\,\nu l^2 \\ c' - c &= \varkappa \frac{l^4}{24E\Theta} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{VIII.}$$

so schreiben sich Gleichungen VI. und VII. in folgender Form:

$$\chi = q - 2\mu - \nu + \varkappa$$
$$\psi = -q + \mu + 2\nu + \varkappa$$

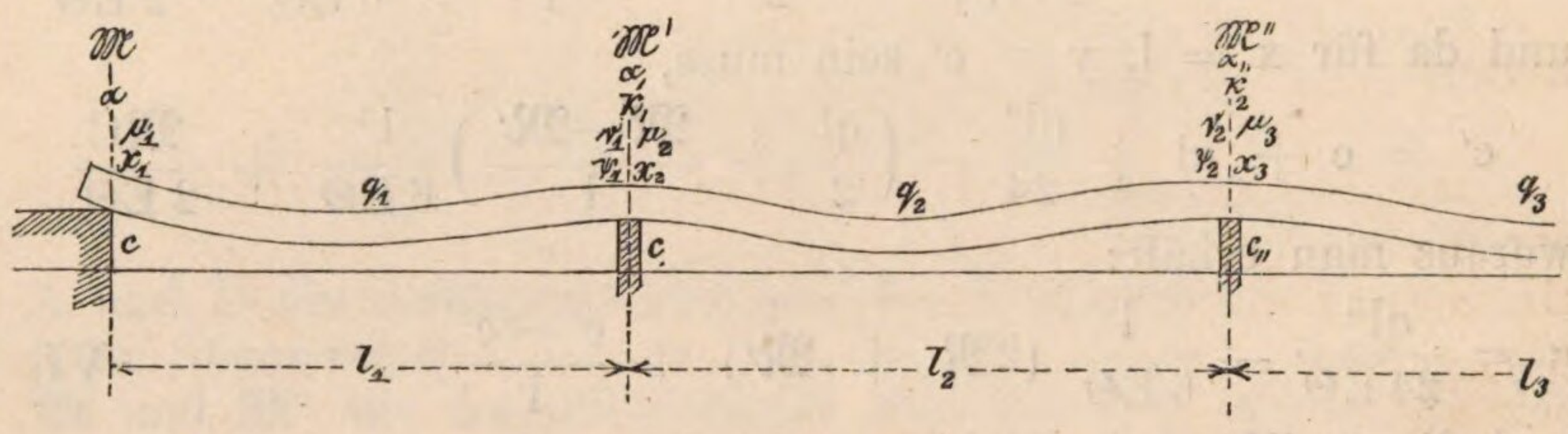
welche sich leicht in folgende abändern:

$$\left.\begin{aligned} \nu &= q - 2\mu - \chi + \varkappa \\ \psi &= q - 3\mu - 2\chi + 3\varkappa \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{IX.}$$

Diese Gleichungen geben die Werthe für $\mathfrak{M}$ und α für eine Spannweite, wenn die entsprechenden Werthe der vorhergehenden bekannt sind, unmittelbar mit Hülfe der Relationen VIII.

22. Durch wiederholte Anwendung der Gleichungen IX. in N°. **21.** kann man nun für einen beliebig unterstützten Träger von n Oeffnungen die Biegungskurve, die Momente auf den Stützpunkten und die Auflagerdrücke auffinden.

Fig. 21.



Es bezeichnen:

$l_1\ l_2\ l_3 \ldots\ldots\ldots l_n$ die Grösse der Spannweiten,
$\mathfrak{M}\ \mathfrak{M}',\ \mathfrak{M}_{''},\ \mathfrak{M}_{'''} \ldots \mathfrak{M}_n$ die Momente auf den Stützpunkten,
$\alpha\ \alpha',\ \alpha_{''},\ \alpha_{'''} \ldots\ldots\ldots \alpha_n$ die Tangentenwinkel der elastischen Linie auf den Stützpunkten mit der horizontalen.
$q_1\ q_2\ q_3 \ldots\ldots\ldots q_n$ die Belastung der einzelnen Spannweiten pro Längeneinheit,
$c\ c',\ c_{''},\ c_{'''} \ldots\ldots\ldots c_n$ die Ordinaten der Stützpunkte.

Führen wir analog Gleichung VIII. die folgenden Hülfsgrössen ein indem wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{l_1^{\,3}}{24\,E\Theta}\ \psi_1 = \frac{l_2^{\,3}}{24\,E\Theta}\ \chi_2 \\ \alpha_{''} &= \frac{l_2^{\,3}}{24\,E\Theta}\ \psi_2 = \frac{l_3^{\,3}}{24\,E\Theta}\ \chi_3 \\ \mathfrak{M}' &= {}^2/_8\, l_1^{\,2}\, \nu_1 = {}^2/_8\, l_2^{\,2}\, \mu_2 \\ \mathfrak{M}'' &= {}^2/_8\, l_2^{\,2}\, \nu_2 = {}^2/_8\, l_3^{\,2}\, \mu_3 \\ c' - c &= \varkappa_1 \frac{l_1^{\,4}}{24\,E\Theta} \\ c_{''} - c' &= \varkappa_2 \frac{l_2^{\,4}}{24\,E\Theta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{X.}$$

so schreiben sich die Gleichungen für die verschiedenen Spannweiten folgendermassen:

für die erste Spannweite

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= q_1 - 2\mu_1 - \chi_1 + k_1 \\ \psi_1 &= q_1 - 3\mu_1 - 2\chi_1 + 3k_1 \end{aligned}\right\}$$

für die zweite Spannweite

$$\left.\begin{aligned} \nu_2 &= q_2 - 2\mu_2 - \chi_2 + k_2 \\ \psi_2 &= q_2 - 3\mu_2 - 2\chi_2 + 3k_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 44)$$

für die n^{te} Spannweite

$$\left.\begin{aligned} \nu_n &= q_n - 2\mu_n - \chi_n + k_n \\ \psi_n &= q_n - 3\mu_n - 2\chi_n + 3k_n \end{aligned}\right\}$$

Auf dem ersten und letzten Stützpunkt ist das Moment der äusseren Kräfte 0, somit noch zu setzen:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n = 0$$

woraus

$$\mu_1 = \nu_n = 0$$

Die Elimination der Hülfsgrössen hat bei der einfachen Form der Gleichungen keine Schwierigkeit. Eliminirt man nämlich mit Hülfe der Relationen X. das System von Unbekannten $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3 \ldots\ldots$ $\chi_1\ \chi_2\ \chi_3 \ldots\ldots$, so enthalten die Gleichungen 44) nur noch die Unbekannten $\nu_1\ \nu_2\ \nu_3 \ldots\ldots\ \psi_1\ \psi_2\ \psi_3 \ldots\ldots$ woraus der Reihe nach die Grössen $\nu_1\ \nu_2\ \nu_3 \ldots\ldots$ und mit Hülfe der Relationen X. die gesuchten Momente auf den Stützpunkten $\mathfrak{M}_1\ \mathfrak{M}_2\ \mathfrak{M}_3$ etc. gefunden werden können.

Ist $\mathfrak{M}$ gefunden, so erhält man die Auflagerdrücke auf den Stützpunkten aus Gleichung II. und die Gestalt der neutralen Linie aus Gleichung V.^{a}, womit Alles bekannt ist. Die in einem spätern Abschnitt folgenden Beispiele werden die Anwendbarkeit der oben gegebenen Formeln darthun.

23. Die in N°. **19—22.** enthaltenen Betrachtungen sind unter der Voraussetzung durchgeführt, dass der betrachtete Balken überall denselben Querschnitt habe. Diess ist in der Praxis häufig nicht der Fall und müssen die Formeln eine Modifikation erleiden, wenn der Balkenquerschnitt sich nach der Länge entweder stetig oder sprungweise ändert. Für den Fall der in der Praxis wenigstens annähernd vorkommt, dass die Querschnitte auf die Länge einer Spannweite konstant, für die auf einander folgenden Spannweiten jedoch verschieden sind, sind die Formeln 44) anwendbar, nur ist in den Relationen X. statt des constanten Θ für jede Spannweite ein besonderes $\Theta_1\ \Theta_2\ \Theta_3 \ldots\ldots$ einzuführen.

Wechselt Θ innerhalb der Spannweite, so sind unsere Formeln nicht mehr direkt anwendbar, wir werden später bei den Anwendungen hierauf zurückkommen.

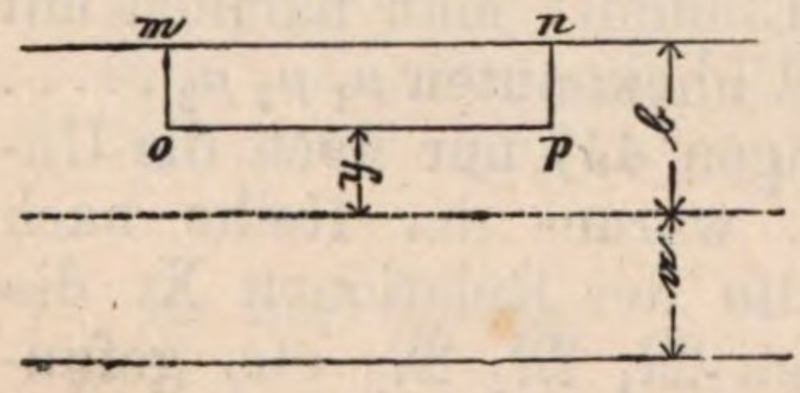
24. Die in den vorstehenden Nummern **13—23** entwickelte Berechnung des Widerstandsmoments und der Biegung stabförmiger Körper ist durch die Erscheinungen der Praxis hinreichend bestätigt. — Behufs weiterer Entwicklung muss jedoch diese seit Navier allgemein anerkannte Theorie ausgedehnt und theilweise modificirt werden.

Es ist nämlich ein durch Biegung relativ in Anspruch genommener Stab nicht allein in seiner Längenrichtung gepresst und gezogen, sondern es wirken auch nach allen Richtungen abscheerende Kräfte, von denen wir zunächst nur diejenigen zu betrachten haben, welche parallel der Ebene XY wirken.

Der Vertikalwiderstand ΣY, welcher durch Gleichung 14) und 14[a]) für jeden Querschnitt eines Balkens bestimmt wird, ist beim homogenen Träger nichts Anderes als die Summe der vertikalen Composanten sämmtlicher im fraglichen Querschnitt thätigen Schubkräfte.

Betrachten wir ein Stück mnop eines beliebigen Balkens, so sind wir mittelst der vorangegangenen Theorie der relativen Festigkeit im Stande, die in (mo) und (np) thätigen horizontalen Composanten der innern Pressungen oder Spannungen zu finden. Bezeichnen wir mit mo und np die Summe fraglicher Kräfte, so muss, damit Gleichgewicht bestehe, längs op eine Kraft thätig sein:

Fig. 22.



$$s = (np) - (mo)$$

es ist diess die im fraglichen Horizontalschnitt thätige Schubkraft (s. Nr. **12**.). Von der Existenz dieser Kraft überzeugt man sich leicht, wenn man bedenkt, dass bei einem verzahnten Balken die Zähne eben diese Schubkraft aufnehmen müssen. — In Folge dieser auf Abscheeren wirkenden Kraft tritt eine Verschiebung der Atome im Balken ein und die vor der Biegung normalen Querschnitte sind nach der Biegung schief zur neutralen Faser gerichtet, die einzelnen Schichten sind nicht, wie wir vorausgesetzt, concentrisch. — Diese Abweichung ist so äusserst gering, dass die Spannungen und Pressungen in den Längenfasern keine Aenderung erleiden, — wohl aber fragt es sich, in welcher Weise das Material ausserdem durch besagte Schubkräfte in Anspruch genommen ist.

Behalten wir ganz dieselben Bezeichnungen bei, wie bei Entwicklung der relativen Festigkeit, so erhalten wir als Resultante aller in np thätigen horizontalen Kräfte:

$$(\Sigma X) = \int_y^b \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}} \, zydy$$

und da nach Gleichung 31) $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}} = \frac{\Sigma Xy}{\Theta}$

so ist $$(\Sigma X) = \frac{\Sigma Xy}{\Theta} \int_y^b zydy$$

Die auf die Länge dx bei p wirkende Schubkraft ist daher nach der am Anfang der Nummer gegebenen Betrachtung $(\Sigma X) - (\Sigma X,) = d(\Sigma X)$ und die in op wirkende auf die Längeneinheit bezogene Schubkraft S ist:

$$S = \frac{d(\Sigma X)}{dx} = \frac{d(\Sigma Xy)}{dx} \frac{1}{\Theta} \int_y^b zydy$$

woraus mit Benützung von Gleichung 17)

$$S = \frac{\Sigma Y}{\Theta} \int_y^b zy \,.\, dy \quad . \quad . \quad 45)$$

Man sieht leicht, dass die horizontale Schubkraft ihren grössten Werth erhält in der neutralen Faser, für welche $y = o$ ist.

Für die neutrale Faser lässt sich der Ausdruck für S zur Anschauung bringen. Bezeichnet man nämlich die Resultante aller Pressungen oder Spannungen in einem Balkenquerschnitt mit R, mit $\mathfrak{H}$ die Entfernung ihrer Angriffspunkte (s. Nr. **7.**), so ist:

$$(\Sigma X) = R$$
$$\Sigma Xy = R\mathfrak{H}$$

folglich die Schubkraft in der neutralen Faser:

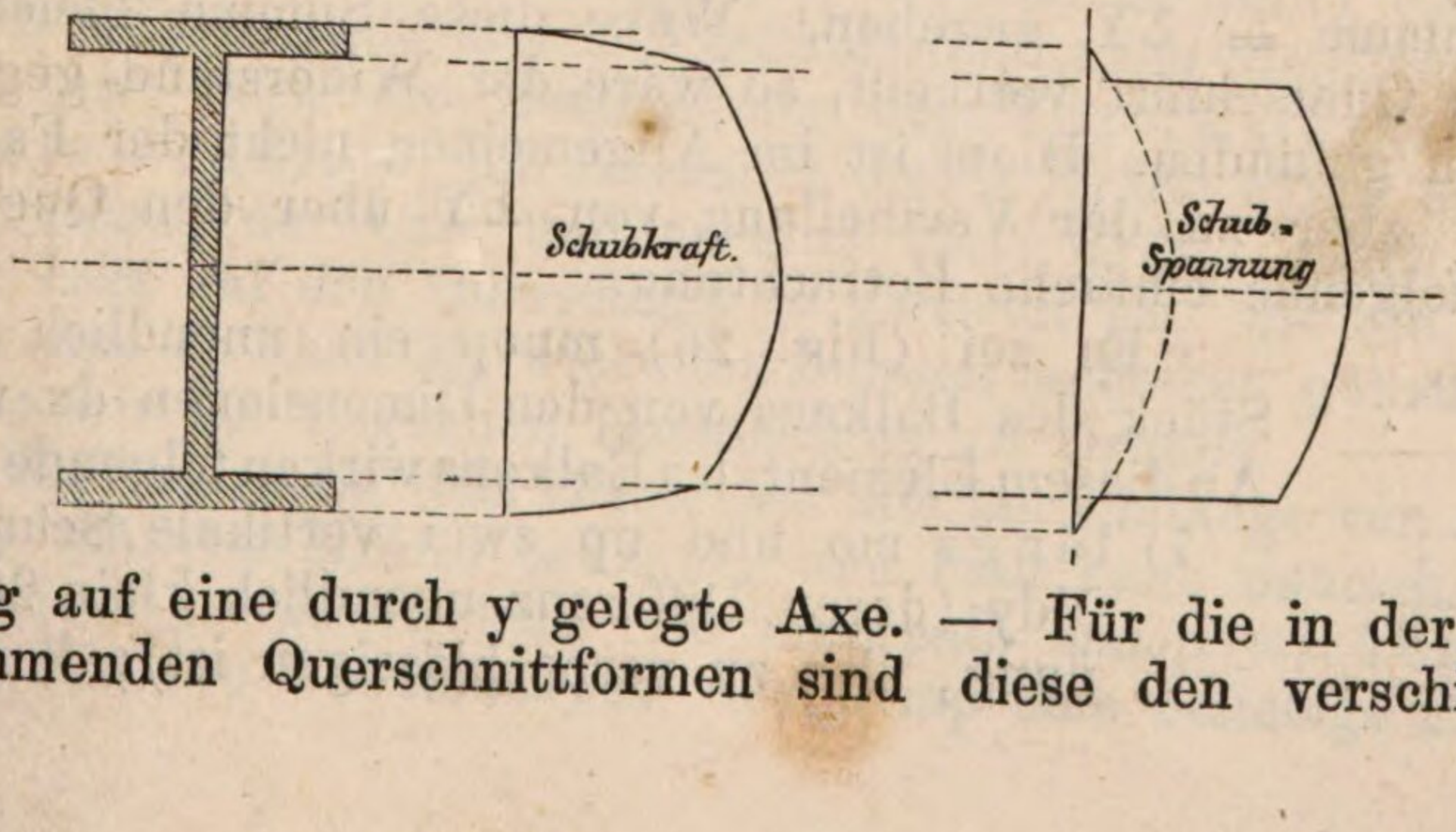
$$S_o = \frac{dR}{dx} = \frac{1}{\mathfrak{H}} \frac{d(\Sigma Xy)}{dx}$$

und nach Gleichung 17)

$$S_o = \frac{\Sigma Y}{\mathfrak{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 46)$$

Es findet sich übrigens die Schubkraft S für jeden Höhenabstand auch aus Gleichung 45) ohne besondere Schwierigkeit; für einen und denselben Querschnitt ist nämlich $\frac{\Sigma Y}{\Theta}$ constant und es bedeutet das Integral der Gleichung 45) das Moment des zwischen den Ordinaten y und b befindlichen Querschnittfragments in Be-

Fig. 23. Fig. 24. Fig. 25.



ziehung auf eine durch y gelegte Axe. — Für die in der Praxis vorkommenden Querschnittformen sind diese den verschiedenen

Ordinaten y entsprechenden Momente mit Leichtigkeit anzuschreiben, und hieraus findet sich S, weil direkt proportional, durch eine einfache Multiplikation oder auch durch Anwendung eines Proportional-Massstabs. — Trägt man, wie in Fig. 24. geschehen, die so gefundenen Schubkräfte für hinreichend viele y als Ordinaten auf, so erhält man eine Kurve, welche die Zunahme der Schubkraft gegen die neutrale Faser anschaulich macht. — Ist der Querschnitt des Balkens ein Rechteck, so ist die Schubkraft proportional den Ordinaten einer Parabel, deren Scheitel in der neutralen Faser liegt, und deren Axe horizontal ist. — Besteht der Querschnitt aus verschiedenen Rechtecken, so setzt sich die Curve der S aus einzelnen Parabelbögen zusammen, deren Scheitel sämmtlich in der neutralen Faser liegen und deren Axen ebenfalls horizontal sind.

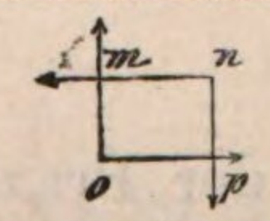
Durch diese Schubkraft ist das Material zunächst auf Abscheeren in Anspruch genommen; die durch die Schubkraft S hervorgerufene Schubspannung $\mathfrak{S}$ erhalten wir aus Gleichung 45) und 46) durch Division mit der Breite des Querschnitts an der betrachteten Stelle

$$\mathfrak{S} = \frac{S}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 47)$$

Wie oben für S angedeutet, so kann auch $\mathfrak{S}$ graphisch dargestellt werden; für einen Balken von rechteckigem Querschnitt ist die Kurve der $\mathfrak{S}$ wie die der S wiederum eine Parabel und für einen aus mehreren Rechtecken zusammengesetzten Querschnitt setzt sich die Kurve aus Parabeln zusammen, welche merkwürdiger Weise derselben Kurve angehören und zwar durch staffelförmige Absätze getrennt sind, aber ihre Scheitel sämmtlich in der neutralen Faser haben (s. Fig. 25.). — Die Schubspannung ist um so grösser, je kleiner z; die hier angestellten Untersuchungen sind daher hauptsächlich von Wichtigkeit für Balken mit dünnen Mittelrippen.

25. In ähnlicher Weise, wie in horizontalen Schnitten findet nach allen Richtungen im Balken ein Bestreben der Theile, an einander vorbeizugleiten, statt. Betrachten wir zuerst die Schubkräfte in einem vertikalen Querschnitt, so ist nach dem Früheren ihre Summe $= \Sigma Y$ gegeben. Wäre diese Summe gleichförmig auf den Querschnitt vertheilt, so wäre der Widerstand gegen Abscheeren gefunden. Diess ist im Allgemeinen nicht der Fall, man gelangt aber zu der Vertheilung von ΣY über den Querschnitt durch folgende einfache Betrachtung.

Fig. 26.



Es sei (Fig. 26) mnop ein unendlich kleines Stück des Balkens von den Dimensionen dx und dy. An diesem Element des Balkens wirken folgende Kräfte:

1) längs mo und np zwei vertikale Schubkräfte Vdy (deren Differenz unendlich klein 2ter Ordnung, also zu vernachlässigen ist);

2) senkrecht zu mo und np die Spannungen der Fasern direkt entgegengesetzt, ihre Differenz ist unendlich klein 2ter Ordnung;
3) längs mn und op zwei horizontale Schubkräfte Sdx (deren Differenz unendlich klein 2ter Ordnung);
4) senkrecht zu mn und op vertikale, direkt entgegengesetzte Kräfte, herrührend von der Art der Vertheilung der Last, deren Differenz als unendlich klein 2ter Ordnung zu vernachlässigen ist.

Als Bedingung des Gleichgewichts erhält man daher einfach:

$$S \,.\, dx \times dy = Vdy \times dx$$
$$S = V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 48)$$

wo S nach Gleichung 45) und 46) gefunden wird. — Folglich ist die im vertikalen Querschnitt, pro Längeneinheit, an einer bestimmten Stelle wirkende Schubkraft, gleich der an derselben Stelle wirkenden horizontalen Schubkraft, letztere gleichfalls auf die Längeneinheit bezogen.

Wir haben schon mehrfach darauf hingewiesen, dass die Summe aller vertikalen Schubkräfte $= \Sigma Y$ sein muss; dieses Resultat muss sich auch ergeben, wenn man sämmtliche nach Gleichung 45) und 48) berechnete, im Vertikalschnitt statthabende Schubkräfte addirt. — Integrirt man den Ausdruck für Vdy zwischen den Grenzen y und b, so erhält man:

$$\int_y^b Vdy = \int_y^b \frac{\Sigma Y}{\Theta}\, dy \int_y^b zydy$$
$$= \frac{\Sigma Y}{\Theta} \int_y^b dy \int_y^b zydy$$
$$= \frac{\Sigma Y}{\Theta} \left[y \int_y^b zydy - \int_y^b zy^2 dy \right]$$

für $y = a$ wird das erste Glied o, weil die neutrale Faser durch den Schwerpunkt geht, und das zweite Glied $= \Theta$, sonach:

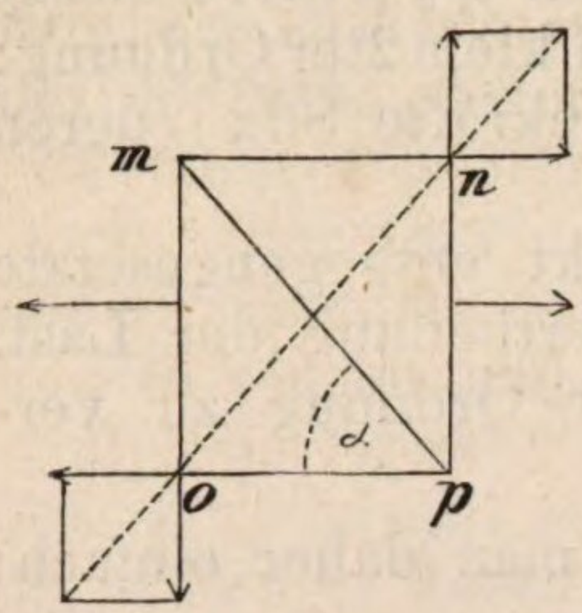
$$\int_a^b Vdy = \Sigma Y$$

womit bewiesen.

Wir haben die Schubkräfte in vertikalem und horizontalem Sinn bestimmt durch Gleichung 45) und 48), wir kennen ferner die Vertheilung der Horizontalkräfte im Vertikalschnitt nach Gleichung 25); es bleibt nur noch die Bestimmung der Vertikalkräfte im Horizontalschnitte; die Intensität dieser Kräfte hängt ab von der Vertheilung der Last und es sind diese Kräfte gleich Null, wenn die Last auf den Querschnitt so vertheilt ist, wie die Kraft ΣY nach dem so eben Entwickelten; diesen einfachen günstigsten Fall legen wir der folgenden Entwicklung zu Grunde.

26. Es sind nach dem Bisherigen alle am Umfange von mnop (Fig. 26) thätigen Kräfte bekannt, und man kann nunmehr für jede beliebige Richtung die innerhalb mnop wirkenden inneren Kräfte bestimmen. Wenn mp eine beliebige Fläche

Fig. 27.



bezeichnet (Fig. 27), so wird im Allgemeinen die Resultante der die Fläche angreifenden Kräfte mit dieser Fläche einen endlichen Winkel bilden. Zerlegt man die Resultante parallel und normal zur Fläche, so stellt die Composante parallel zur Fläche eine Schubkraft, die normal gerichtete einen Druck oder Zug vor.

Bezeichnet

C die per Längeneinheit wirkende Schubkraft,

D den normal wirkenden Druck oder Zug per Längeneinheit,

$\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ die entsprechenden auf die Quadrateinheit reduzirten Spannungen,

$\mathfrak{A}$ die Spannung oder Pressung in den äussersten Fasern des betrachteten Körperfragments,

y den Abstand des Körper-Elements mnop,

$\mathfrak{A}_y$ die Längenspannung oder Längenpressung in diesem Element,

z die Dicke des Elements mnop nach der Axe der z,

setzt man ferner

$$mp = ds$$
$$mn = dx$$
$$op = dy$$

so finden folgende Relationen statt:

Schubkraft $\quad Cds = Vdz \sin\alpha - Sdx \cos\alpha + \mathfrak{A}_y \,.\, z \,.\, dy \,.\, \cos\alpha$

Druck od. Zug $\quad Dds = Vdy \cos\alpha + Sdx \sin\alpha + \mathfrak{A}_y \,.\, z \,.\, dy \,.\, \sin\alpha$

hiebei sind S und V durch Gleichung 45) und 48) definirt, $\mathfrak{A}$ gibt die Spannung in der äussersten Längenfaser an, da nun

$$dy = ds \sin\alpha$$
$$dx = ds \cos\alpha$$

so ist nach einigen Reduktionen und indem nach Gleichung 48) S = V ist,

$$C = S \cos 2\alpha + \frac{\mathfrak{A}_y z}{2} \sin 2\alpha \quad . \quad . \quad 49)$$

$$D = S \sin 2\alpha + \frac{\mathfrak{A}_y z}{2} (1 - \cos 2\alpha) \quad 50)$$

Will man in diesen beiden Gleichungen statt der Schubkräfte die entsprechenden Schubspannungen in der äussersten Faser einführen, so ist zu setzen:

$$C = z\,\mathfrak{C}$$
$$S = z\,\mathfrak{S}$$

und man erhält:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{S} \cos 2\alpha + \frac{\mathfrak{A}_y}{2} \sin 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad 21)$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{S} \sin 2\alpha + \frac{\mathfrak{A}_y}{2} (1 - \cos 2\alpha) \quad . \quad 52)$$

Durch die Gleichungen 49) bis 52) ist der allgemeinste Ausdruck für Schub, Druck und Zug an einer beliebigen Stelle eines homogenen Trägers gegeben, wobei die Werthe von S, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}$ aus den Gleichungen 31), 45) und 47) bestimmt sind.

Um die Maximalwerthe von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ zu bestimmen, bleiben wir bei einem und demselben Balkenelement, für welches $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}_y$ constant sind; Maximum oder Minimum für $\mathfrak{C}$ findet statt für

$$\frac{d\mathfrak{C}}{d\alpha} = -2\,\mathfrak{S}\sin 2\alpha + \mathfrak{A}_y \cos 2\alpha = 0$$

woraus folgt:

$$\text{ty}\ 2\alpha = {}^1/_2\,\frac{\mathfrak{A}_y}{\mathfrak{S}}$$

und diesen Werth in Gleichung 51) eingeführt, ergibt sich als Maximum für $\mathfrak{C}$:

$$\mathfrak{C}_{max} = \sqrt{\mathfrak{S}^2 + ({}^1/_2\,\mathfrak{A}_y)^2} \quad \ldots\ldots\ 53)$$

Aus den Gleichungen 51) und 53) ergeben sich ferner folgende Resultate. — In der äussersten Faser $y = a$ ist $\mathfrak{S} = 0$, und ist für $\alpha = 45^0$, $\mathfrak{C} = {}^1/_2\,\mathfrak{A}$ zugleich ein Maximum, während für $\alpha = 0$ und 90^0 $\mathfrak{C} = 0$, also ein Minimum ist.

In der neutralen Faser $y = 0$ ist für

$\alpha = 90^0$ . . . $\mathfrak{C} = \mathfrak{S}$ und Maximum,
$\alpha = 0^0$ . . . $\mathfrak{C} = \mathfrak{S}$ und ebenfalls Maximum.

Für Fasern, welche zwischen der äussersten und der neutralen Faser liegen, kann $\mathfrak{C}$ grösser werden als $\mathfrak{A}$; diess findet namentlich Statt und ist von besonderer Bedeutung bei Trägern mit dünnen Mittelrippen; für diese ist $\mathfrak{S}$ auf die ganze Höhe der Mittelrippe nahezu constant, somit vom Maximum wenig abweichend, und andrerseits findet in den äussersten Fasern dieser Mittelrippe eine Längenspannung oder Längenpressung Statt, welche der in den äussersten Trägerfasern wirkenden Längenspannung $\mathfrak{A}$ sehr nahe steht; — es ist somit schon vorab erklärlich, dass $\mathfrak{C}$ als Resultante von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}_y$ die Maximalwerthe $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{A}_0$ leicht übersteigen wird.

Verlangt man nun, dass $\mathfrak{C}$ nie grösser werde als die grösste zulässige Spannung $\mathfrak{A}_0$, welche in der äussersten Längenfaser wirkt, so folgt aus Gleichung 53) für die Schubspannung $\mathfrak{S}_0$ in der neutralen Faser:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_0 &= \sqrt{\mathfrak{S}_0{}^2 + \left(\frac{A_0}{2}\right)^2} \\ \mathfrak{S}_0 &= {}^1/_2\,\mathfrak{A}_0\sqrt{3} = 0{,}866\,\mathfrak{A}_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 54)$$

Wir bestimmen nun ebenso das Maximum oder Minimum von $\mathfrak{D}$, welches Statt findet für

$$d\mathfrak{D} = 2\,\mathfrak{S}\cos 2\alpha + {}^1/_2.\,\mathfrak{A}_y \sin 2\alpha$$

woraus

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}_y}$$

Diesen Werth in Gleichung 52) eingesetzt, gibt für das Maximum von $\mathfrak{D}$

$$\mathfrak{D}_{max} = \frac{\mathfrak{A}_y}{2} \pm \sqrt{\mathfrak{S}^2 + \left(\frac{\mathfrak{A}_y}{2}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 55)$$

In der äussersten Faser ist $\mathfrak{S} = 0$, somit

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{A}_y}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

woraus folgt:

$\alpha = 0 \quad \ldots \mathfrak{D} = 0$ und Minimum,
$\alpha = 90^0 \ldots \mathfrak{D} = \mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}$ und Maximum.

In der neutralen Faser ist $\mathfrak{A}_y = 0$ und somit

$\alpha = 45^0 \ldots \mathfrak{D} = \mathfrak{S}$ und Maximum

Für die zwischenliegenden Fasern ist, wie aus Gleichung 55) unmittelbar hervorgeht, $\mathfrak{D}_{max}$ jedenfalls grösser als $\mathfrak{A}_y$ und $\mathfrak{S}$, wenn $\mathfrak{S}$ auch einen noch so kleinen aber endlichen Werth hat. Wegen dieser Einwirkung die die Schubspannung $\mathfrak{S}$ auf den Werth $\mathfrak{D}_{max}$ ausübt, und um gleichzeitig auch der Gleichung 54) zu genügen, soll die Schubspannung $\mathfrak{S}_0$ in der neutralen Faser ansehnlich kleiner gewählt werden, als die grösste Spannung $\mathfrak{A}_0$ (Pressung $\mathfrak{B}_0$) in den äussersten Längenfasern; wir werden in der Folge meist setzen

$$\mathfrak{S}_0 \leqq 0{,}7\,\mathfrak{A}_0 \leqq 0{,}7\,\mathfrak{B}_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 56)$$

in welcher Gleichung die Grössen $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ durch vorstehende Erläuterung bezeichnet sind.

Bei Annahme der durch Gleichung 56) gegebenen Relation wird, wie auch die nachfolgenden Beispiele ausweisen, die in den äussersten Längenfasern herrschende Spannung oder Pressung in der Regel nicht wesentlich überschritten und zwar hauptsächlich desshalb, weil $\mathfrak{A}_y$ seinen grössten Werth in den äussersten Fasern, $\mathfrak{S}$ dagegen in der neutralen Faser erreicht; es wird nur etwa bei grösseren Brücken, wo die Gurtung im Verhältniss zur Wandhöhe niedrig ist, die Spannung in der Wand und zwar unmittelbar unter oder über der Gurtung die in den Gurtungen herrschende grösste Längenspannung in erheblicher Weise überschreiten.

Für jedes Element setzt sich aber $\mathfrak{D}_{max}$ aus $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}_y$ nach Gleichung 55) zusammen und sind in nachstehender Tabelle diese Maximalwerthe von $\mathfrak{D}$ für die verschiedenen $\mathfrak{S}$ (horizontale

Schubspannung) und $\mathfrak{A}_y$ (Längenspannung in dem betrachteten Körper-Element) zusammengestellt.

Tabelle VI.

$\mathfrak{A}_y =$	100	200	300	400	500	600	700	800
$\mathfrak{S} =$ 100	161,8	241,4	330,2	423,6	519,2	616,2	714,0	812,3
200	256,1	323,6	400,0	482,8	570,1	660,4	753,1	847,2
300	354,1	416,2	485,4	560,6	640,5	724,2	811,0	900,0
400	453,1	512,2	576,9	647,2	721,7	800,0	881,5	965,6
500	552,4	609,9	672,0	738,5	809,0	883,1	960,3	1040,3
600	652,1	708,3	768,3	832,5	900,0	970,8	1044,6	1121,2
700	751,8	807,1	865,9	928,0	993,3	1061,6	1132,6	1206,2
800	851,6	906,2	963,9	1024,4	1088,2	1154,4	1223,2	1294,4

27. Inwieweit die gleichzeitigen Werthe von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}_y$ in der Praxis einander gegenseitig beeinflussen, soll an einem einfachen Beispiele gezeigt werden. — In der graphischen Darstellung Tafel I. sind 3 verschiedene Querschnitte eines Brückenträgers von 15 Met. Lichtweite verzeichnet und indem man angenommen, dass die Spannung in den äussersten Längenfasern je 600 Kilogr. und die Schubspannung in der neutralen Faser je 350 Kilogr. per Quadratcentimeter betrage, so sind die hienach sich ergebenden Schubkräfte und Schubspannungen, nach Gleichung 45) und 47), dessgleichen die der Länge nach wirkenden Spannungen (oder Pressungen) $\mathfrak{A}_y$, nach Gleichung 31), endlich die in schräger Richtung wirkenden grössten Spannungen (oder Pressungen), nach Gleichung 55), berechnet und in der genannten graphischen Darstellung nach je demselben Maassstabe aufgetragen, so dass man mit einem Blick die im fraglichen Träger an den verschiedenen Punkten wirkenden Kräfte je nach ihren numerischen

Werthen geordnet überschauen kann. Die in schräger Richtung in der Wand zunächst der Gurtung wirkende Spannung (Pressung) $\mathfrak{D}_{max}$ ist um Weniges grösser als die Längenspannung (Pressung) in der äussersten Faser.

28. In Tafel VII. ist für den Querschnitt der Eisenbahnbrücke von Langon eine graphische Darstellung der horizontalen Schubspannungen und der grössten in schiefer Richtung wirkenden Spannungen (Pressungen) gegeben, es ist vorausgesetzt, dass die grösste Längenspannung in den äussersten Fasern 600 Kil. pro Quadratcent. und die Schubspannung in der neutralen Axe 350 Kil. pro Quadratcent. betrage, und ist die numerische Berechnung der einzelnen Curvenpunkte aus den beiden folgenden Tabellen VII. und VIII. ersichtlich; es sind in diesen Tabellen $\mathfrak{A}$ nach Gleichung 31), $\mathfrak{S}$ nach Gleichung 45) und 47) und $\mathfrak{D}_{max}$ nach Gleichung 55) berechnet.

Tabelle VII.

Berechnung der horizontalen Schubspannung.

Horizontal-schnitt.	Querschnitt-flächen.	Ordinaten der Schwerpunkte.	Momente der Querschnitt-flächen.	Momentensumme: $\int_y^b zydy$	Breite des Horizontal-schnitts z.	$\left(\frac{\int_y^b zydy}{z}\right)$		Bemerkungen.
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)		
VII.				0	90	0		Die äussern Winkel und Vertikelplatten müssen zum Querschnitte des Hauptbandes gerechnet werden.
	$90 \times 4{,}8$	272,6						
	$+ 61{,}4 \times 1{,}2$	269,6	167515					
	$+ 9{,}0 \times 8{,}2$	264,5						
	$+ 12 \times 3{,}4$	254,0						
VI.				167515	90 21,2	1861,3	7901	
	$21{,}2 \times 1{,}2$	269,6	6858					
V.				174373	21,2 3,6	8225	48437	
	$9 \times 3{,}6$	264,5	8570					
IV.				182943	3,6 1,2	50817	152452	Colonne (4) ist proportional der horizontalen Schubkraft S, Colonne (6) proportional der horizontalen Schubspannung $\mathfrak{S}$.
	$100 \times 1{,}2$	210	25200					
III.				208143	1,2	173452		
	$80 \times 1{,}2$	120	11520					
II.				219663	1,2	183052		
	$80 \times 1{,}2$	40	3840					
I.				223515	1,2	186252		

Tabelle VIII.

Berechnung des Maximums der Spannung (Pressung) im schrägen Schnitt $\mathfrak{D}_{max}$.

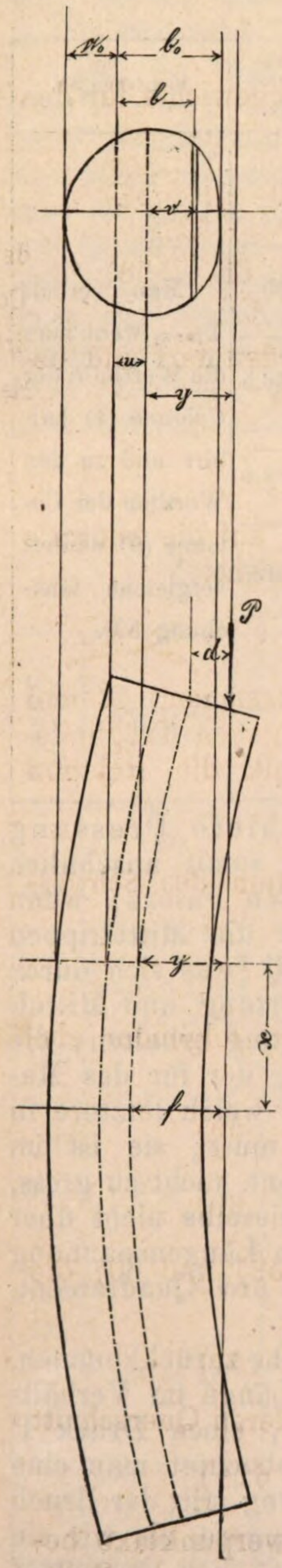
Horizontalschnitt.	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{S}$	$\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{A}}{2}\right)^2 + \mathfrak{S}^2}$	Grösste Spannung oder Pressung $\mathfrak{D}_{max}$.	Bemerkungen.
	(1)	(2)	(3)	(4)	
VII.	600	0	300	600	
VI.	590	15 / 0	295,5 / 295	590,5 / 590	Man erhält $\mathfrak{D}_{max}$, wenn man die Werthe $\mathfrak{A}$ der Colonne (1) halbirt und zu den Werthen der Colonne (3) addirt; vergleiche Gleichung 55).
V.	586	90 / 16	306,5 / 293,5	600 / 586,5	
IV.	567	286 / 96	403 / 299,6	687 / 583,6	
III.	350	325	369	544	
II.	175	345	356	444	
I.	0	350	350	350	

Zunächst der Gurtung ist die grösste schiefe Pressung in der Wand 687 Kilogr. per Quadratcent., somit ansehnlich grösser als die Längenspannung in den äussersten Fasern; wenn man also bei grossen Blechwandbrücken die Mittelrippen (Blechwand) nicht übermässig stark machen will (was sich durch den Kostenaufwand verbietet), so ist da wo Gurtung und Mittelrippe gleichzeitig die grösste zulässige Anstrengung erhalten, die Längenspannung der Gurtung entsprechend unter der für das Material zulässigen grössten Spannung zu halten, welch letztere in der Wandung zunächst der Gurtung eintreten muss; sie ist im vorliegenden Falle mit 687 Kilogr. pro Quadratcent. nicht zu gross, hätte man sich aber die Aufgabe gestellt, dass dieselbe nicht über 600 Kilogr. betragen dürfe, so hätte man für die Längenspannung in der äussersten Faser nur etwa 525 Kilogr. pro Quadratcent. nehmen dürfen.

Wir werden später auf diese wichtige Thatsache zurückkommen.

29. Wenn ein prismatischer Stab, dessen Länge im Verhältniss zu seinen Querschnittdimensionen gross ist, einen Druck P parallel seiner Längenrichtung erleidet, so beobachtet man eine Ausbiegung des Stabes; in Folge dieser Ausbiegung tritt der Bruch frühzeitiger ein, die Bruchbelastung ist eine geringere, als wie sie in Gleichung 21) für absolut rückwirkende Festigkeit berechnet

Fig. 27.



ist; der längere Stab wird durch die Kraft P in Bezug auf seine relativ rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen.

Wenn die Gestalt der gebogenen Längenaxe und ebenso der Abstand der Kraft P von dieser Axe bekannt sind, so kann Pressung und Spannung an jedem Punkte des Stabes in gleicher Weise berechnet werden, wie wir oben bei der relativen Festigkeit gesehen.

Wir nehmen die Axe der x zusammenfallend mit der Richtung der Kraft P und nehmen ferner an, dass die gebogene Axe symmetrisch zur Axe der x liege, indem wir uns zunächst den Stab an beiden Enden ganz frei denken.

Wir nennen

d den Abstand des Schwerpunkts der beiden äussersten Querschnitte von der Axe der x,

f den Abstand des mittelsten Querschnitts, was zugleich die grösste Abweichung der gebogenen Axe des Stabs von der Kraftrichtung bezeichnet;

ferner sei

L die Länge des Stabes,

ω der Querschnitt desselben,

Θ der Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt — und zwar senkrecht zur Biegungsebene — gelegte Axe,

u der Abstand der neutralen Faser vom Schwerpunkt jedes einzelnen Querschnitts,

$\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ die in den äussersten Fasern herrschende Spannung und Pressung, welche in den Abständen a_0, beziehungsweise b_0 vorhanden sind.

Denken wir uns nun einen beliebigen Querschnitt dieses Stabes und nennen

x, y die Condinaten des Schwerpunkts dieses Querschnitts;

denken wir uns ferner ein beliebiges Element z dб dieses Querschnitts senkrecht zur Ebene xy (d. h. parallel der neutralen Schichte) und nennen

б den Abstand dieses Elements von der neutralen Faser,

v den Abstand desselben Elements von dem Schwerpunkt des Querschnitts,

so erhalten wir ähnlich wie in N°. **13.** zunächst als den im Element z . db herrschenden Druck

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0} \mathfrak{b} \,.\, z\, db$$

und es geben hienach die Bedingungen des Gleichgewichts für den betrachteten Querschnitt:

$$P + \frac{\mathfrak{A}_0}{a_0}\int_0^{a_0} \mathfrak{a} \,.\, z\, da - \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0}\int_0^{b_0} \mathfrak{b}z \,.\, db = 0 \quad . \quad . \quad 57)$$

$$P\,(y + u) = \frac{\mathfrak{A}_0}{a_0}\int_0^{a_0} \mathfrak{a}^2 z\, da + \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0}\int_0^{b_0} \mathfrak{b}^2 z \,.\, db \,. \quad 58)$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{\mathfrak{A}_0}{a_0} = \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0}$ gesetzt werden darf und bemerkt, dass

$$\Theta_u = \int_0^{a_0} \mathfrak{a}^2 z\, da + \int_0^{b_0} \mathfrak{b}^2 z\, db$$

das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die neutrale Faser bezeichnet, so folgt aus Gleichung 58) zunächst

$$P\,(y + u) = \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0} \,.\, \Theta_u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 58^a)$$

Bedenkt man ferner, dass zwischen dem Trägheitsmoment Θ_u und dem auf den Schwerpunkt des Querschnitts bezogenen Trägheitsmoment Θ nach bekannten Sätzen der Mechanik die Relation besteht

$$\Theta_u = \Theta + \omega \,.\, u^2$$

und bemerkt schliesslich, dass nach der Definition des Schwerpunkts

$$\int_0^{a_0} \mathfrak{a} \,.\, z \,.\, da + \int_0^{b_0} \mathfrak{b} \,.\, z\, db = \omega \,.\, u,$$

so schreiben sich die Gleichungen 57) und 58) in folgender einfacher Form um:

$$P = \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0} \,.\, u \,.\, \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59)$$

$$P\,(y + u) = \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0}\,(\Theta + \omega u^2) \quad . \quad . \quad . \quad 60)$$

und erhält man nunmehr aus den Gleichungen 59) und 60) die Relation

$$u = \frac{\Theta}{\omega \,.\, y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 61)$$

Da für $x = o$, $y = f$ wird, so folgt für den mittleren Querschnitt

$$u = \frac{\Theta}{\omega \,.\, f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 61^a)$$

d. h. wenn der Abstand der Kraft P von der Schwerpunktaxe bekannt ist, so findet sich aus den bekannten Dimensionen des Stabs

nach Gleichung 61), beziehungsweise 61ª) die Verrückung u der neutralen Faser.

30. Wird der aus Gleichung 61) gefundene Werth von u in Gleichung 59) eingesetzt, so folgt

$$Py = \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0} \cdot \Theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 62)$$

Wenn man den Abstand der am meisten comprimirten Faser vom Schwerpunkt des Querschnitts mit v_0 bezeichnet (entsprechend der obigen Bedeutung von v), so ist

$$b_0 = u + v_0$$

und schreibt sich hienach vorstehende Gleichung 62):

$$Py = \frac{\mathfrak{B}_0}{u + v_0} \cdot \Theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 62^a)$$

woraus mit Benützung von Gleichung 61) folgt:

$$\mathfrak{B}_0 = Py \frac{v_0}{\Theta} + \frac{P}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 63)$$

In gleicher Weise findet man für die Spannung der am meisten ausgedehnten Faser

$$\mathfrak{A}_0 = Py \cdot \frac{v_0}{\Theta} - \frac{P}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 63^a)$$

Für den mittleren Querschnitt ist $y = f$ zu setzen. Wird in Gleichung 63ª) $\mathfrak{A}_0$ negativ, so zeigt diess an, dass im Querschnitt nur Pressung, nirgends Spannung herrscht. Vergleicht man mit Gleichung 63) die Gleichungen 20) und 31), so erkennt man, dass die grösste Pressung $\mathfrak{B}_0$ im betrachteten Querschnitt sich zusammensetzt aus der Pressung $\frac{P}{\omega}$ in Folge des auf die Quadrateinheit reduzirten Druckes P und aus derjenigen Pressung, welche durch das Moment derselben am Hebelarme y gleichzeitig auf Biegung wirkenden Kraft P hervorgerufen wird, und zwar ist letztere Pressung so gross wie die grösste Pressung in einem auf relative Festigkeit in Anspruch genommenen Stab von der Länge 4y, beziehungsweise 4f, welcher Stab an beiden Enden frei aufliegt und in der Mitte mit P belastet ist.

31. Aus Gleichung 63) könnte die grösste Pressung in einem auf relativ rückwirkende Festigkeit angegriffenen Stabe sofort gefunden werden, sobald der Kraft-Abstand f bekannt wäre; letzterer setzt sich zusammen aus dem Biegungspfeil und aus dem Abstand d, welchen die Kraft schon vor Eintritt der Biegung hatte. — Letzterer Abstand ist aber häufig bekannt und kann dann zur Bestimmung des unbekannten Abstandes f dienen. — Zu diesem Zweck ist die Gleichung der elastischen Linie zu bestimmen.

Analog der in N°. **18.** entwickelten Anschauung haben wir für die Gestalt der neutralen Axe — deren Radius wir mit ϱ_1 bezeichnen — entsprechend Gleichung 40)

$$\Sigma Xy = Py = \frac{\Theta E}{\varrho_1}$$

und indem wir mit ϱ den Radius der Schwerpunktaxe bezeichnen, wobei $\varrho_1 = \varrho + u$ zu setzen, so ist

$$Py = \frac{\Theta E}{\varrho + u} \quad \ldots\ldots\ldots 64)$$

Setzt man für ϱ den aus der analytischen Geometrie bekannten Werth $\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ ein und für u seinen Werth aus Gleichung 61), so folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Py}{\Theta\left(E - \frac{P}{\omega}\right)} = \frac{y}{\Theta\left(\frac{E}{P} - \frac{1}{\omega}\right)} \quad 65)$$

Den Ausdruck $\Theta\left(\frac{E}{P} - \frac{1}{\omega}\right)$ setzen wir der Einfachheit halber gleich t, so folgt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{t} \quad \ldots\ldots\ldots 65^a)$$

Durch Integretion dieser Gleichung erhält man

$$y = C \,.\, \sin \frac{x}{\sqrt{t}} + C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{t}} \quad . \quad 66)$$

wobei C und C_1 zwei constante Grössen bezeichnen; zur Auffindung dieser letzteren dient die Betrachtung, dass y für x und — x denselben Werth haben muss, woraus folgt:

$$C = o, \text{ und indem man } x = \frac{L}{2} \text{ setzt,}$$

$$C_1 = f,$$

und schreibt sich hienach Gleichung 66):

$$\left.\begin{aligned} d &= f \cos \frac{L}{2\sqrt{t}} \\ f &= \frac{d}{\cos \frac{L}{2\sqrt{t}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 67)$$

Setzt man endlich diesen Werth von f in Gleichung 63) ein, so erhält man

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{P}{\omega} + \frac{Pv_0}{\Theta} \frac{d}{\cos \frac{L}{2\sqrt{t}}} \quad \ldots 68)$$

ebenso aus Gleichung 63ª)

$$\mathfrak{A}_0 = -\frac{P}{\omega} + \frac{P v_0}{\Theta} \frac{d}{\cos \frac{L}{2\sqrt{t}}} \quad . \quad . \quad 68^a)$$

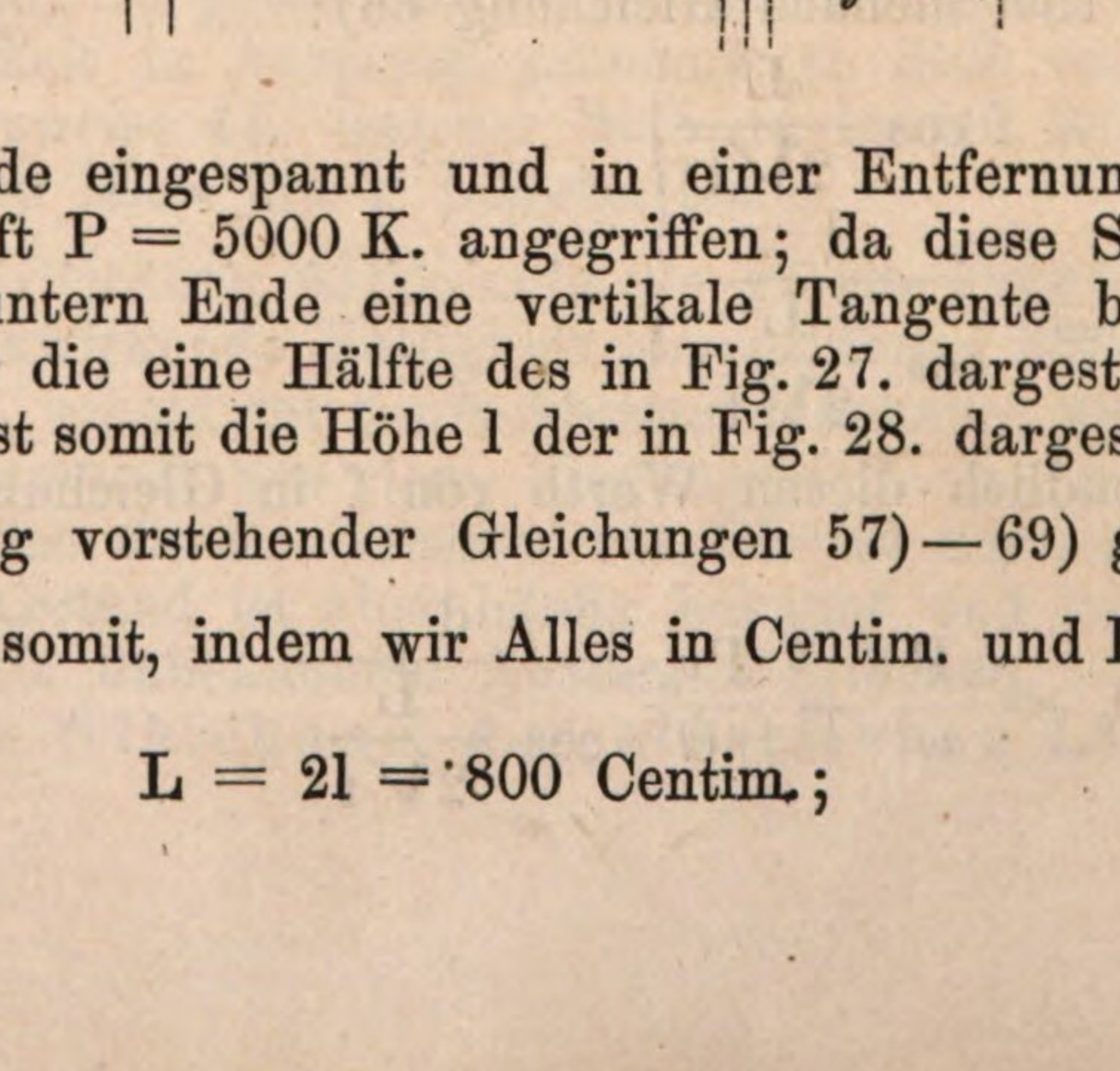
und indem man Gleichung 68) in Beziehung auf P auflöst

$$P = \mathfrak{B}_0 \omega \frac{1}{1 + \frac{v_0 \omega}{\Theta} \cdot \frac{d}{\cos \frac{L}{2\sqrt{t}}}} \quad . \quad 69)$$

Aus letzterer Gleichung kann übrigens P nur durch Probiren gefunden werden, da der Ausdruck $t = \Theta \left(\frac{E}{P} - \frac{1}{\omega} \right)$ die Kraft P gleichfalls enthält.

32. Wir zeigen die Anwendung der Gleichung an einem Beispiele. — Eine gusseiserne volle runde Säule von 4 M. Höhe sei

Fig. 28.



am untern Ende eingespannt und in einer Entfernung von 1 M. von einer Kraft P = 5000 K. angegriffen; da diese Säule bei der Biegung am untern Ende eine vertikale Tangente beibehält, so haben wir nur die eine Hälfte des in Fig. 27. dargestellten Stabes vor uns, und ist somit die Höhe l der in Fig. 28. dargestellten Säule bei Anwendung vorstehender Gleichungen 57) — 69) gleich $\frac{L}{2}$ zu setzen; es ist somit, indem wir Alles in Centim. und Kilogrammen ausdrücken:

$$L = 2l = 800 \text{ Centim.};$$

ferner sei der Säulendurchmesser D = 20 Centim., somit

$$v_0 = \frac{D}{2} = 10 \text{ Centim.}$$

$$\omega = \frac{\pi D^2}{4} = 314 \text{ □C.}$$

$$\Theta = \frac{\pi D^4}{64} = 7850$$

$$t = \frac{\Theta E}{P} - \frac{\Theta}{\omega} = 1'413000$$

und folgt somit aus Gleichung 68) unmittelbar

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{5000}{314} + \frac{5000 \,.\, 10}{7825} \cos \frac{100}{\frac{800}{2\sqrt{1413000}}}$$

$$\mathfrak{B}_0 = 16 + 677 = 693 \text{ Kilo.}$$

Um die Ausbiegung des Stabes zu bestimmen, setzen wir nach Gleichung 67)

$$f = \frac{d}{\cos \frac{L}{2\sqrt{t}}} = \frac{d}{0{,}94} = 106 \text{ C.,}$$

woraus sich ein Biegungspfeil f — d von 6 Centimetern ergibt. — Wenn nun auch diese Ausbiegung für sich ansehnlich genug ist, so kann sie doch im vorliegenden Falle für annähernde Berechnung der grössten Pressung vernachlässigt werden; denn wenn man in Gleichung 63[a]) anstatt f = 106 Cent. den zum Voraus bekannten Werth d = 100 Cent. gesetzt hätte, so hätte man erhalten $\mathfrak{B}_0 = 16 + 639 = 655$ Kilo anstatt dem genauern Werth von 693 K.; bei weniger starken Biegungen wird diese Annäherung ganz befriedigende Resultate geben.

33. Je grösser der Abstand d ist, d. h. je weiter entfernt die Druckrichtung von der Axe des Stabes ist, desto grösser wird die grösste Pressung bei gegebener Stablänge; anderseits wenn eine bestimmte Pressung nicht überschritten werden soll, so ist der Abstand d desto kleiner zu nehmen, je grösser die Stablänge.

Wir finden, indem wir Gleichung 68) in Beziehung auf d auflösen,

$$d = \left(\mathfrak{B}_0 - \frac{P}{\omega}\right) \frac{\Theta}{P v_0} \cos \frac{L}{2\sqrt{t}} \quad . \quad 70)$$

Wenn wir eine Säule von demselben Durchmesser D = 20 Centim. wiederum am untern Ende eingespannt und mit einer Last P = 5000 Kilo belastet denken, so ist

$$\omega = 314 \text{ □Centim.}$$

$$\frac{P}{\omega} = 16 \text{ Kilo per □Centim.}$$

Soll $\mathfrak{B}_0$ nicht grösser sein als 1200 K., so wird $\mathfrak{B}_0 - \frac{P}{\omega} = 1184$; ist $\mathfrak{B}_0 - \frac{P}{\omega}$ sechsmal so gross $= 7104$, so ist auch d sechsmal grösser, während $\mathfrak{B}_0 = 7120$ K. beträgt, was nahe der Bruchlast entspricht. — Für diese beiden Werthe von $\mathfrak{B}_0$ haben wir in Tabelle IX.

Tabelle IX.

d in Centimetern ist für:		$l = \frac{L}{2}$ in metres.
$\mathfrak{B}_0 = 1200$	$\mathfrak{B}_0 = 7120$	
$= 175{,}3$ C.	$= 1052$ C.	4
162,6	976	6
145,5	872	8
123,9	743	10
98,9	594	12
71,2	427	14
41,4	248	16
10,5	63	18
0	0	18,77

eine Reihe von d für verschiedene Längen berechnet, indem nach obigen Angaben in Gleichung 70) weiterhin gesetzt wurde:

$$\Theta = 7850$$
$$v_0 = 10 \text{ C.}$$
$$t = 1'413000,$$

wodurch für $\mathfrak{B}_0 = 1200$ Kilo

$$d = 185{,}9 \cos \frac{L}{2378}$$

und für $\mathfrak{B}_0 = 7120$ Kilo

$$d = 1115{,}3 \cos \frac{L}{2378}$$ erhalten wurde.

Für $\cos \frac{L}{2378} = 0$ oder $L = 18{,}77$ M. wird $d = 0$, und zwar für jede Pressung $\mathfrak{B}_0$, während für 18 M. die verschiedenen d noch ansehnliche Werthe zeigen; es deutet diess darauf hin, dass ein am untern Ende eingespannter runder gusseiserner Stab von 18,77 M. Länge und 20 C. Durchmesser die Belastung von 5000 K. nicht mehr ertragen kann, wenn sie auch ganz genau in der Schwerpunktaxe wirkt. — Für einen solchen Stab ist also die genannte Belastung unter allen Umständen Bruchlast.

Aehnliche Betrachtungen können mittelst Gleichung 68[a]) angestellt werden, wenn die grösste zulässige Spannung vorgeschrieben ist.

34. Da wir im Vorhergehenden gesehen, dass die einer bestimmten Bruchlast entsprechende Länge sich sehr scharf markirt, so kann man hievon ausgehen, um die Bruchlast bei gegebener Länge für den günstigsten Fall zu bestimmen, wenn $d = 0$ ist, d. h. wenn die Kraft genau in die Axe des Stabes fällt.

Wenn man aber in den Gleichungen 68) — 70) $d = 0$ setzen will, so erhält man entweder $\mathfrak{B}_0 = \frac{P}{\omega}$, was nur für ganz kurze Stäbe richtig ist, oder es muss ausser d auch noch die Grösse $\cos \frac{L}{2\sqrt{t}} = 0$ sein; woraus folgt

$$\frac{L}{2\sqrt{t}} = \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 71)$$

Diese letztere Gleichung haben wir schon in dem Beispiele der vorhergehenden Nummer erhalten und darf solche als Bedingungs-Gleichung für Auffindung der Bruchlast benutzt werden.

Setzen wir in derselben den Werth $t = \frac{\Theta E}{P} - \frac{\Theta}{\omega}$ ein, so erhalten wir

$$P = E\omega \frac{1}{\frac{\omega L^2}{\pi^2 \Theta} + 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 72)$$

woraus, wenn man 1 gegen $\frac{\omega L^2}{\pi^2 \Theta}$ vernachlässigt, was für längere Stäbe stets zulässig, ist:

$$P = \frac{\pi^2 \Theta E}{L^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 72^a)$$

Letztere Gleichung hat schon Navier als Bruchbelastung für lange Stäbe aufgestellt.

Abgesehen davon, dass diese Gleichung uns keine Pressung auffinden lehrt, so hat sie insbesondere den Mangel, dass sie für kürzere Stäbe ganz unbrauchbar wird; denn P darf nie

grösser werden, als die Gleichung 21) für absolut rückwirkende Festigkeit ergibt, es ist im Gegentheil in Folge der Biegung P stets kleiner.

Aber selbst für längere Stäbe stimmt Gleichung 72) nicht mit den Erfahrungen und Versuchen überein. Wir benützen als Beispiel die Versuche, welche E. Hodgkinson mit vierkantigen schmiedeisernen Stäben von 1 Zoll englisch Seite anstellte, um sie mit den Resultaten der Gleichung 72) zu vergleichen.

Die Betrachtung der Tabelle X. zeigt, dass die Gleichung 72) nicht blos für ganz kurze, sondern auch für die längeren Stäbe unrichtige Resultate gibt, welche nur wenn die Längen etwa 30mal grösser als der Durchmesser sind, mehr übereinstimmen. — Auffallend ist, dass die Gleichung 72) für die längeren Stäbe ungünstigere Resultate gibt, als die Versuche; diess rührt wohl daher, dass die Enden der Versuchsstäbe doch nicht so frei sich bewegen konnten, wie in der Gleichung vorausgesetzt ist, indem dieselben mit platten Endflächen versehen waren.

Tabelle X.

Länge des Stabes = L.	$\frac{L}{D}$	Bruchlast in englischen ℔	
		beobachtet.	berechnet.
10 Fuss englisch	120	4245	1280
7,5 Fuss	90	10236	2276
5 Fuss	60	18106	5121
2,5 Fuss	30	26530	20480
1,25 Fuss	15	36162	81940
7½ Zoll	7,5	50946	327760
3¾ Zoll	3,75	55200	1‘487400

35. Wie wir so eben gesehen haben, stimmen selbst die mit so grosser Sorgfalt angestellten Versuche des E. Hodgkinson mit den Resultaten der Gleichung 72) nicht überein; diess wird bei den gewöhnlichen Bauconstructionen noch in höherem Grade der Fall sein, indem hier die Druckrichtung von der Schwerpunkts-

axe immer etwas abweichen wird, so sehr man auch nach vorstehender Darstellung darauf angewiesen ist, die einzelnen Constructionsglieder genau nach der Richtung der Druckkräfte anzuordnen. — Eine weitere Unregelmässigkeit besteht darin, dass die Baumaterialien nicht durchaus homogen sind und endlich dass eine kleine Krümmung schon vor Beginn der Krafteinwirkung vorhanden sein kann.

Anderseits hat man es bei den Bauconstructionen im Allgemeinen nicht mit solch unverhältnissmässig langen Stäben zu thun; bei den beim Bauen üblichen Dimensionen wird vielmehr die seitliche Abweichung der Kraft inner gewisser Grenzen sich bewegen und insolange der Constructeur eine Uebereinstimmung zwischen der Richtung der Kraft und der Längenaxe des gepressten Glieds anstrebt, wird für die Abweichung f der Kraft ein gewisses Gesetz sich geltend machen. — Wie wir aber in N°. **30**. gefunden, so lässt sich die grösste Pressung, und umgekehrt die durch eine gewisse Pressung hervorgerufene Kraft bestimmen, sobald der Abstand f für den Schwerpunkt des mittleren Querschnitts gefunden ist. — Lösen wir Gleichung 63) in Beziehung auf P auf, so erhalten wir durch Wertheinsetzung von $f = \max(y)$

$$P = \mathfrak{B}_0 \omega \frac{1}{1 + \frac{v_0 \omega}{\Theta} f} \quad \ldots\ldots \quad 73)$$

Die Abweichung f ist der Natur der Sache nach eine unbekannte Grösse, welche nach Beschaffenheit des Materials, nach Gestaltung der Endflächen veränderlich und insbesondere auch von der Solidität der Ausführung abhängig ist. — Letztere Punkte müssen insbesondere in Erwägung gezogen werden, wenn es sich um die Bestimmung der in der Rechnung einzuführenden freien Länge des Stabes handelt; diese Länge hängt wesentlich ab von der Anwendung der Construction, so dass wir z. B. in N°. **32.** diese Länge gleich der doppelten Länge des betrachteten Stabes nehmen mussten.

Diess vorausgesetzt, wird f für ein und dasselbe Material mit zunehmender Länge sich sehr vergrössern, dagegen bei zunehmenden Querschnittdimensionen abnehmen; diesen Factoren tragen wir dadurch Rechnung, dass wir

$$f = K \cdot \frac{L^2}{v_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 74)$$

setzen, wo K ein durch die Erfahrung für jedes Material festzustellender Coefficient ist.

Wenn man diesen Werth von f in Gleichung 73) einsetzt, so erhält man

$$P = \mathfrak{B}_0 \omega \cdot \frac{1}{1 + K \cdot \frac{\omega}{\Theta} L^2} \quad \ldots\ldots \quad 75)$$

Diese Gleichung hat auch Aehnlichkeit mit der theoretischen Gleichung 72); denn für den Fall, dass $\frac{K\omega L^2}{\Theta}$ sehr gross gegenüber der Einheit ist und somit letztere vernachlässigt werden darf, erhalten wir aus Gleichung 75)

$$P = \frac{\mathfrak{B}_0}{K\omega} \frac{\Theta}{L^2}$$

und nach Gleichung 72)

$$P = \pi^2 E \frac{\Theta}{L^2}$$

und liegt hierin zunächst eine weitere Rechtfertigung, dass wir in Gleichung 74) f proportional L^2 gesetzt haben.

In der Praxis ist aber (wie schon oben angedeutet) L gegenüber $\frac{\Theta}{\omega}$ nicht so gross, dass die Einheit gegenüber $\frac{K\omega L^2}{\Theta}$ vernachlässigt werden dürfte; der Bruch $\frac{1}{1 + \frac{K\omega L^2}{\Theta}}$ gibt an, welcher Theil der absolut mitwirkenden Festigkeit für längere Stäbe zulässig ist; je kleiner L, desto mehr nähert sich dieser Bruch der Einheit, so dass für ganz kurze Stäbe die Gleichung 75) in Gleichung 20), beziehungsweise 21) übergeht. — Θ ist für die Richtung zu berechnen, nach welcher das Ausbiegen voraussichtlich eintritt; diess geschieht bei einseitiger Belastung in der Richtung der Kraft, während bei einer mit der Axenrichtung zusammenfallenden Krafteinwirkung die kleinste Querschnittdimension für die Berechnung von Θ maassgebend ist.

36. Um den Coefficienten K in Gleichung 75) für die Bruchbelastung zu bestimmen, liegen hinreichend viele Versuche mit Stäben von verschiedenen Dimensionen und Querschnittformen vor; die aus den Versuchen gefundenen Mittelwerthe sind in nachstehender Tabelle gegeben:

Tabelle XI.

Für Schmiedeisen	K = 0,00008
„ Gusseisen	K = 0,00025
„ Holz	K = 0,00016

Die dieser Tabelle zu Grunde liegenden Versuche beziehen sich auf Stäbe mit abgeplatteten Enden; für Stäbe mit ganz frei beweglichen abgerundeten Enden wäre K etwa dreimal so gross zu setzen.

Es kann Gleichung 75) durch Einsetzung der vorstehenden

Werthe zur Auffindung der Bruchbelastung für jeden auf relativ rückwirkende Festigkeit angegriffenen Stab angewendet werden.

Wenn wir nun von den Bruchbelastungen auf geringere Belastungen übergehen, so hat K nicht mehr denselben Werth und dürfte es überhaupt nicht wohl gelingen, für beliebige Pressungen $\mathfrak{B}$ die zugehörigen K zu bestimmen; die Gleichung 75) kann daher zunächst nur zur Bestimmung der Bruchbelastung dienen.

Wie wir aber schon in N°. **33.** gesehen, nimmt die Pressung in der Nähe des Bruches für längere Stäbe rasch zu; die sonst übliche zulässige Pressung kann bei einem Gewichte eintreten, welches von der Bruchbelastung nicht sehr verschieden ist; es ist daher gar nicht erlaubt, solche Stäbe bis zu der sonst zulässigen Pressung zu belasten.

Man wird vielmehr ein richtigeres und für alle Fälle sicheres Resultat erhalten, wenn man einen bestimmten Theil der Bruchbelastung als zulässige Belastung annimmt.

Das hiedurch bedingte Rechnungsverfahren ist nun schliesslich sehr einfach.

Man bestimmt für den betrachteten Stab die Bruchbelastung nach Gleichung 75) und Tabelle XI. und erhält sodann die zulässige Belastung sofort durch Dividiren mit dem für das fragliche Material und die beabsichtigte Solidität sonst üblichen Sicherheitscoefficienten.

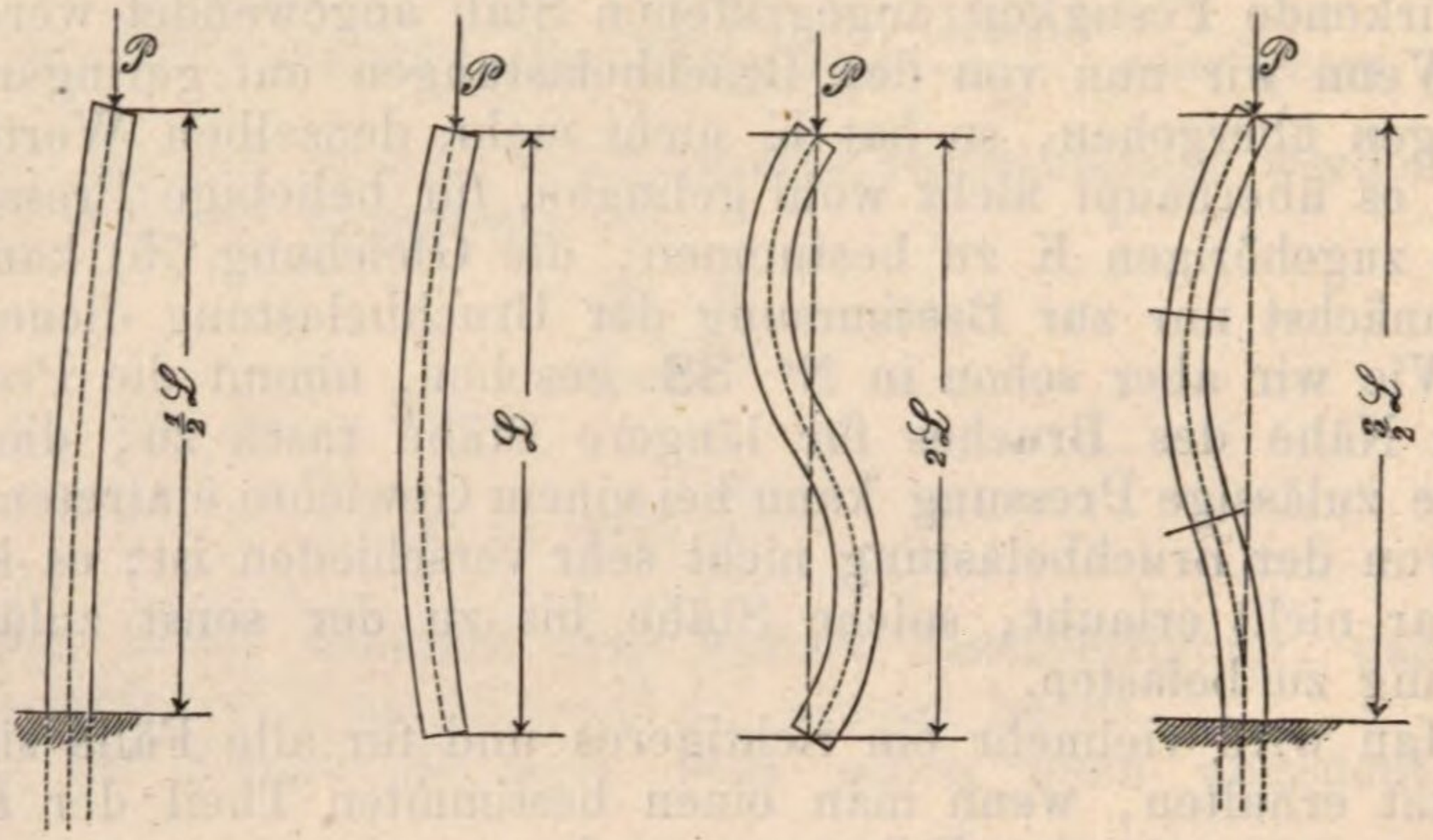
Wenn man die Belastung eines längeren Stabes auf die Quadrateinheit der Querschnittfläche reducirt, so erhält man die mittlere Pressung $\mathfrak{B}_m$; dieselbe ist gleich der bei kurzen Stäben für das fragliche Material und die beabsichtigte Solidität erlaubten Pressung $\mathfrak{B}$, multiplicirt mit dem Quotienten $\frac{1}{1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}}$, somit ist zu setzen

$$\mathfrak{B}_m = \frac{\mathfrak{B}}{1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 76)$$

und ist bei längeren Stäben in allen practischen Formeln der nunmehr genau precisirte Werth $\mathfrak{B}_m$ als zulässige Belastung per Flächeneinheit einzusetzen.

37. Es ist schon wiederholt darauf aufmerksam gemacht worden, dass die in die Formeln 57) — 75) einzuführende Stablänge L durch besondere Untersuchung bestimmt werden muss. — Es ist in ähnlicher Weise wie bei continuirlichen Trägern die für einzelne Punkte gegebene Tangentenrichtung für die Gestalt der neutralen Faser maassgebend. — In nachstehenden Figuren ist die in die Formeln einzuführende Stablänge L der wirklichen Stablänge l für einige Anordnungen gegenüber gestellt.

Fig. 29. Fig. 30. Fig 31. Fig. 32.



Es lassen sich hienach andere Anordnungen beurtheilen und ist nur noch darauf aufmerksam zu machen, dass die Endpunkte nicht blos als frei oder eingespannt, sondern häufig als theilweise eingespannt zu betrachten sind.

Zweiter Abschnitt.

Erfahrungsresultate über die Festigkeit der Baumaterialien.

---

§. 4. Die Festigkeitscoefficienten.

38. Im vorhergehenden §. 3. sind die Formeln entwickelt, mittelst welcher man die Spannung, Pressung und Schubspannung stabförmiger Körper berechnet. — Indem wir nun im Folgenden die für die einzelnen Materialien zulässige Spannung, Pressung und Schubspannung zusammenstellen, so können nunmehr die Dimensionen stabförmiger homogener Körper für alle vorkommenden Fälle bestimmt werden. — Da aber weiterhin sämmtliche Träger aus einzelnen homogenen stabförmigen Körpern bestehen und unsere späteren Untersuchungen stets die auf jedes einzelne Constructionsglied treffenden Kräfte zur Anschauung bringen, so finden die zunächst nur für homogene stabförmige Körper gegebenen Festigkeitscoefficienten allgemeine Anwendung.

Die folgende Tafel XII. gibt die zulässige Spannung $\mathfrak{A}$, Pressung $\mathfrak{B}$ und Schubspannung $\mathfrak{C}$, dessgleichen die entsprechenden Bruchbelastungen $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{C}_0$ und zwar in Kilogrammen per Quadratcentimeter ausgedrückt.

Die zulässige Spannung $\mathfrak{A}$ oder Pressung $\mathfrak{B}$ gibt bei gleichförmig (absolut) gezogenen oder gepressten Stäben den Zug, beziehungsweise Druck, den ein Stab auszuhalten vermag, direct nach Gleichung 20). Bei relativ in Anspruch genommenen Stäben ist $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in Gleichung 31) einzusetzen und ebenso $\mathfrak{B}$ bei relativ rückwirkend angegriffenen längern Stäben in Gleichung 75);

bei letzteren bezeichnet die Grösse $\frac{\mathfrak{B}}{1 + K\frac{\omega L^2}{\Theta}}$ die mittlere Pressung des Stabes. — Die Schubspannung $\mathfrak{C}$ ist durch Gleichung 23) definirt und erscheint insbesondere in den Betrachtungen der N°. **24** bis **28.**

Tabelle XII.

	Bruchgewicht $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ oder $\mathfrak{C}_0$.	Zulässige Spannung $\mathfrak{A}$, Pressung $\mathfrak{B}$, Schubspannung $\mathfrak{C}$.	Sicherheitscoefficient.
Absolute Festigkeit gegen Zug.			
Schmiedeisen, gewöhnliche Qualität . . .	3000	600	5
„ sehr gut gewalzt	3500	700	5
„ bestes Nieteisen	4000	800	5
Eisendraht, 0,5—1 MM. dick	8000	1600	5
„ 1—3 MM. dick	6000	1200	5
„ von grösserem Durchmesser .	5000	1000	5
„ in Bündeln (Taue)	3000	600	5
Gussstahl, gewöhnliche Qualität	6000	1200	5
„ beste Qualität	8000	1600	5
Gusseisen, gute Qualität	1100	220	5
„ beste Qualität	1500	300	5
Eichenholz, trocken	700	70	10
Tannenholz, „	800	80	10
Absolut rückwirkende Festigkeit.			
Schmiedeisen, gewöhnliche Qualität . . .	3000	600	5
„ beste Qualität	3500	700	5
Gusseisen, gute Qualität	7200	1200	6
Gussstahl, gewöhnliche Qualität	6000	1200	5
„ beste Qualität	8000	1600	5
Eichenholz und Tannenholz, trocken . .	480	48	10
Festigkeit gegen Abscheeren.			
Schmiedeisen, gewöhnliche Qualität . . .	3000	600	5
„ bestes Nieteisen	4000	800	5
Gusseisen, gute Qualität	1100	220	5
Gussstahl, gewöhnliche Qualität	6000	1200	5

Die vorstehenden Festigkeitscoefficienten sind Mittelwerthe, da die Güte der einzelnen Materialien im Wesentlichen vom Fabrikationsort abhängt; es ist nicht nur die Wahl des Rohstoffes, sondern insbesondere die Fabrikationsmethode massgebend, und ist letztere manchen Aenderungen unterworfen.

Indessen sind für das gewöhnliche Material der Brückenträger, für gewalztes Schmiedeisen, die beobachteten Bruchgewichte keineswegs sehr verschieden und scheinbar schlechtes cristallinisches

Material kann oft annähernd dieselbe Bruchlast zeigen, wie feinkörniges sehniges Eisen. — Es werden auch die bei der Berechnung von schmiedeisernen Brücken angewendeten Festigkeitscoefficienten von allen Ingenieuren ziemlich gleichförmig angewendet; in Frankreich construirt man meist auf 600 Kilo per □Cent. zulässige Spannung, und nimmt verhältnissmässig grosse Verkehrs- und Probebelastungen an; in England rechnet man meist 4—5 tons per Quadratzoll oder 650—800 Kilo per □Cent., wobei aber meist geringere Verkehrsbelastungen angenommen werden; bei den preussischen Staatsbauten wird 10000 Pfd. per Quadratzoll oder 684 Kilo per □Cent. gerechnet.

Eine sehr vollständige Zusammenstellung der sämmtlichen Versuche und vieler sonstigen Erfahrungen hat Hr. Morin vor einigen Jahren gegeben; seine Schrift „die Widerstandsfähigkeit der Baumaterialien“ ist in deutscher Uebersetzung in der allgemeinen Bauzeitung von Förster in den Jahren 1853 und 1854 erschienen.

39. Es ist bis dahin von uns kein Unterschied zwischen ruhiger und bewegter Last gemacht worden. Und wirklich zeigen auch die beobachteten Einsenkungen grosser steifer Brückenconstructionen keinen entschiedenen Einfluss der Geschwindigkeit, mit der sich die Belastung über die Brücke bewegt. — Dagegen lässt sich der Einfluss der Bewegung auf diejenigen Theile, welche mit der bewegten Last zunächst in Berührung kommen, nicht wohl bezweifeln und ist es gerathen, diese Theile verhältnissmässig stärker zu construiren.

Die nachtheilige Einwirkung der Bewegung kann sich auch erst mit der Zeit entwickeln und könnten öfter wiederholte starke Probebelastungen hierüber genaueren Aufschluss geben; bis dahin muss man in den Sicherheitscoefficienten eine Garantie gegen die allmählige Verschwächung durch häufige auf einander folgende Stösse und allmählige Abnahme der Querschnittdimensionen annehmen.

Hr. Ingenieur Gerber, Vorstand der Brückenbauanstalt von Klett & Cie. in Nürnberg, hat in einer Abhandlung über den Bau der Mainzer Rheinbrücke den Vorschlag gemacht, die zulässige Spannung einer schmiedeisernen Brückenconstruction danach zu bestimmen, dass eine gewisse äusserste Spannungsgrenze durch die Spannung der unbelasteten Brücke plus dem Dreifachen der durch die variable Last hervorgerufenen Spannung nicht überschritten werde; für gutes Walzeisen, dessen Bruchfestigkeit wir zu 3300 Kilo per □Centim. annehmen dürfen, hat Hr. Gerber diese äusserste Spannungsgrenze (Elasticitätsgrenze) zu 1600 Kilo per □Centim. festgesetzt; es hat dieser Vorschlag die Folge, dass für kleine Brücken verhältnissmässig kleinere Totalspannungen gewonnen werden, als für grosse Brücken, wo der Einfluss der variablen Last geringer ist.

Wenn wir die Belastungen auf die Längenheit reduciren und dann

p das Eigengewicht der Brücke,
k die variable Last,
$q = p + k$ die Totallast

nennen, und mit

$\mathfrak{A}_p$ die Spannung im unbelasteten Träger,
$\mathfrak{A}_k$ die Spannung in Folge der variablen Last,
$\mathfrak{A}_q = \mathfrak{A}_p + \mathfrak{A}_k$ die Totalspannung

bezeichnen, so spricht sich obige Regel durch die Formel aus:

$$\mathfrak{A}_p + 3\mathfrak{A}_k = 1600 \text{ K.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 77)$$

und haben wir hienach folgende Tabelle XIII. gebildet:

Tabelle XIII.

$\frac{p}{q}$	$\frac{p}{k}$	$\mathfrak{A}_k = \frac{1600}{\frac{p}{k} + 3}$	$\mathfrak{A}_p$	$\mathfrak{A}_q = \mathfrak{A}_p + \mathfrak{A}_k$
0	0	533	0	533
1/10	1/9	514	57	571
1/7	1/6	505	84	589
1/5	1/4	492	123	615
1/4	1/2	480	160	640
1/3	1/2	457	228	685
2/5	2/3	436	291	727
1/2	1	400	400	800

Eine Brücke, deren Eigengewicht p gleich der per Längeneinheit vertheilten Probelast k ist, ist schon eine sehr grosse Brücke, und über 800 Kilo Totalspannung pro □Centim. zu nehmen, dürfte auch bei noch grösseren Brücken nicht anzurathen sein. Im Uebrigen können wir uns mit der Tabelle XIII. recht wohl einverstanden erklären, da dieselbe ein mit Tabelle XII. übereinstimmendes Resultat gibt; denn für das bei Tabelle XIII. voraus-

gesetzte Eisen wäre die zulässige Spannung $\frac{3300}{5} = 660$ Kilo pro □Centim. zu nehmen und es ist gewiss am Platze, bei kleineren Spannweiten verhältnissmässig kleinere Spannungen anzuwenden. — Die Maschinenfabrik von Klett & Cie. in Nürnberg, welche erklärt hat, dass sie schmiedeiserne Brücken auf Grundlage der obigen Grundsätze (Formel 77) construirt und übernimmt, befindet sich daher in dieser Beziehung im Einklange mit den Annahmen der meisten Ingenieure; die consequente Durchführung der Formel 77) für die einzelnen Brückentheile verspricht eine gleichförmige Solidität sämmtlicher von dem genannten Etablissement übernommenen Brückenbauten (immerhin unter der Voraussetzung, dass die Totalspannung von 800 Kilo für den Quadratcentimeter des gleichförmig gut angenommenen Materials nicht überschritten wird).

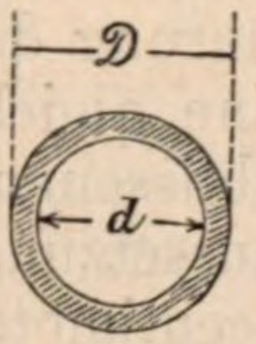
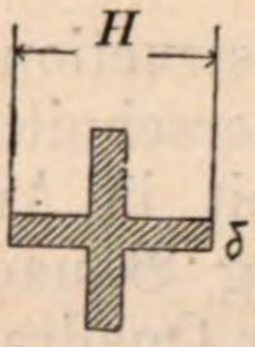
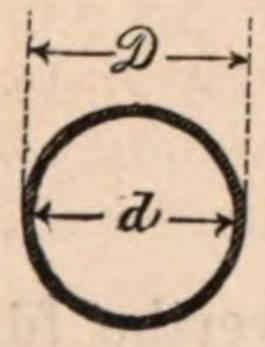
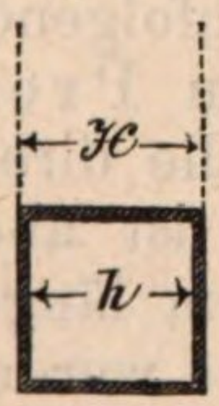
40. Ist die Länge eines gedrückten (gepressten) Constructionsglieds sehr beträchtlich gegenüber seiner kleinsten Querschnittsdimension, so ist dessen relativ rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen und muss dessen grösste Pressung $\mathfrak{B}$ nach Grundlage der Formel 76) berechnet werden, wenn die per Quadrateinheit wirkende mittlere Pressung $\mathfrak{B}_m$ als bekannt vorausgesetzt wird. Andererseits, wenn $\mathfrak{B}'$ die für das fragliche Material zulässige absolute Pressung bezeichnet, so ist die mittlere zulässige Pressung $\mathfrak{B}'_m$ durch die Formel ausgedrückt

$$\mathfrak{B}'_m = \frac{\mathfrak{B}'}{1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 76^a)$$

Die Mittelwerthe für $\mathfrak{B}'$ sind in Tabelle XII., die Mittelwerthe für den Coefficienten K in Tabelle XI. gegeben und erhält man endlich durch Berechnung der Trägheitsmomente Θ die nachfolgende Tabelle XIV., in welcher die zulässigen mittleren Pressungen für eine Reihe der häufiger vorkommenden Fälle direct gegeben sind. — Diese zulässige mittlere Pressung $\mathfrak{B}'_m$ ist aber nach vorstehender Definition diejenige Belastung, die einem längeren Stabe per Quadratcentimeter mit Sicherheit zugemuthet werden darf. — Die Tabelle enthält ausserdem den Bruch $\frac{1}{1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}}$ und gibt dieser an, welcher Theil der absolut rückwirkenden Festigkeit für längere Stäbe in Rechnung zu ziehen ist.

41. Hohle Säulen oder Stäbe mit dünnen Wänden zeigen nach Tafel XIV. eine verhältnissmässig grössere relativ rückwirkende Festigkeit, als volle runde oder viereckige Stäbe, da das Material in Beziehung auf Biegung günstiger vertheilt ist. — Ist jedoch die Wanddicke gegenüber den übrigen Querschnittdimen-

Tabelle XIV.

Verhältnisszahlen $\frac{L}{H}$ oder $\frac{L}{D}$	1	10	20	30	40	50	60
Gusseisen, rund voll Fig. 11 a.	1200 1	857 $\frac{1}{1,4}$	462 $\frac{1}{2,6}$	261 $\frac{1}{4,6}$	162 $\frac{1}{7,4}$	109 $\frac{1}{11}$	78 $\frac{1}{15,4}$
 Fig. 9. rund hohl $\frac{d}{D} = \frac{5}{6}$	1200 1	1071 $\frac{1}{1,12}$	810 $\frac{1}{1,48}$	580 $\frac{1}{2,07}$	407 $\frac{1}{2,94}$	302 $\frac{1}{3,97}$	227 $\frac{1}{5,28}$
rund hohl $\frac{d}{D} = \frac{9}{10}$	1200 1	1081 $\frac{1}{1,11}$	833 $\frac{1}{1,44}$	603 $\frac{1}{1,99}$	435 $\frac{1}{2,76}$	318 $\frac{1}{3,77}$	241 $\frac{1}{4,98}$
 kreuzförmig $\frac{H}{\delta} = 10$	1200 1	755 $\frac{1}{1,59}$	355 $\frac{1}{3,38}$	189 $\frac{1}{6,35}$	114 $\frac{1}{1,05}$	76 $\frac{1}{15,85}$	54 $\frac{1}{22,4}$
Schmiedeisen, voll viereckig Fig. 11 b.	600 1	550 $\frac{1}{1,09}$	435 $\frac{1}{1,38}$	323 $\frac{1}{1,86}$	237 $\frac{1}{2,53}$	177 $\frac{1}{3,4}$	136 $\frac{1}{4,4}$
 rund hohl $\frac{d}{D} = \frac{48}{50}$	600 1	566 $\frac{1}{1,06}$	476 $\frac{1}{1,26}$	380 $\frac{1}{1,58}$	294 $\frac{1}{2,04}$	228 $\frac{1}{2,63}$	179 $\frac{1}{3,35}$
rund hohl $\frac{d}{D} = \frac{98}{100}$	600 1	566 $\frac{1}{1,06}$	476 $\frac{1}{1,26}$	382 $\frac{1}{1,57}$	296 $\frac{1}{2,03}$	230 $\frac{1}{2,62}$	181 $\frac{1}{3,32}$
Fig. 7 b.  quadratisch hohl $\frac{h}{H} = \frac{23}{25}$	600 1	571 $\frac{1}{1,05}$	500 $\frac{1}{1,20}$	414 $\frac{1}{1,45}$	331 $\frac{1}{1,81}$	265 $\frac{1}{2,26}$	213 $\frac{1}{2,81}$
quadratisch hohl $\frac{h}{H} = \frac{24}{25}$	600 1	571 $\frac{1}{1,05}$	500 $\frac{1}{1,20}$	417 $\frac{1}{1,44}$	337 $\frac{1}{1,78}$	270 $\frac{1}{2,22}$	218 $\frac{1}{2,76}$
s. oben Fig. 9. kreuzförmig $\frac{H}{\delta} = 25$	600 1	504 $\frac{1}{1,19}$	341 $\frac{1}{1,76}$	221 $\frac{1}{2,72}$	148 $\frac{1}{4,06}$	102 $\frac{1}{5,87}$	76 $\frac{1}{7,88}$
Gussstahl, voll viereckig	1400 1	1275 $\frac{1}{1,09}$	1014 $\frac{1}{1,38}$	700 $\frac{1}{1,86}$	553 $\frac{1}{2,53}$	412 $\frac{1}{3,4}$	318 $\frac{1}{4,4}$
Holz, voll viereckig	60 1	50 $\frac{1}{1,2}$	34 $\frac{1}{1,77}$	22 $\frac{1}{2,72}$	15 $\frac{1}{4,07}$	10 $\frac{1}{5,80}$	8 $\frac{1}{7,90}$

sionen zu gering, so findet beim Bruch ein Einknicken der dünnen Wand Statt; für solche Fälle ist die zulässige Pressung schon für kurze Stäbe entsprechend zu vermindern, und bei längeren Stäben ist die so verminderte zulässige Pressung ausserdem mit dem Quotienten $\frac{1}{1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}}$ zu multipliciren.

Diesem Einknicken kann man aber durch zweckmässige Absteifungen entgegenwirken, und zwar können letztere sowohl parallel als senkrecht zur Längenrichtung angebracht sein; so werden z. B. schmiedeiserne Röhren zweckmässig durch einzelne Ringe ausgesteift, welche verhältnissmässig wenig Material erfordern.

Wenn die Absteifung durch längere Rippen geschieht, so sind solche in der Regel dem tragenden Querschnitt hinzuzunehmen; man kann die genaue Berechnung des Trägheitsmoments des oft complicirten Querschnitts durch Annahme einer mittleren Wanddicke umgehen.

42. Sehr ausgedehnte Versuche über die rückwirkende Festigkeit des Gusseisens hat E. Hodgkinson angestellt und veröffentlicht unter dem Titel: Experimental researches on the strenght and other properties of cast iron, with the development of new principles etc. by Eaton Hodgkinson 1846 (im Auszug übersetzt: Annales des Ponts et Chaussées 1855).

Für gusseiserne Säulen, welche stumpf aufgestellt und an den Enden befestigt werden, hat Hodgkinson nachstehende Formeln gegeben.

Bezeichnet

L die Säulenlänge in Decimetern,

D den äusseren und

d den inneren Säulendurchmesser in Centimetern,

so ist das in Kilogrammen ausgedrückte Bruchgewicht P_c:

für volle Säulen

$$P_c = 10{,}38 \frac{D^{3,6}}{L^{1,7}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 77)$$

für hohle Säulen

$$P_c = 10{,}41 \frac{D^{3,6} - d^{3,6}}{L^{1,7}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 78)$$

Diese Formeln sind genau, wenn die Länge wenigstens 25mal grösser ist, als der Säulendurchmesser, für kürzere Säulen hat Hodgkinson das nach Gleichung 77) und 78) bestimmte Bruchgewicht P_c combinirt mit der absolut rückwirkenden Festigkeit; bezeichnet nämlich P_b das nach Gleichung 21) für ganz kurze Stäbe gefundene Bruchgewicht, so ist für etwas grössere Längen, welche aber unter dem 25fachen des Durchmesser sich bewegen,

$$\text{Bruchgewicht } P_c' = \frac{P_c P_b}{P_c + {}^3/_4 P_b} \quad . \quad 79)$$

wo P_c nach Gleichung 77) oder 78) bestimmt vorausgesetzt ist.

Diese Formeln 77)—79) stimmen für die beim Brückenbau üblichen Dimensionen mit den Resultaten von Gleichung 75) und Tafel XIV. überein; bei sehr langen Stäben kann eine vollständige Uebereinstimmung nicht erwartet werden, zumal hier der Bruch bei denselben durch Zerreissen der am meisten gezogenen Faser eintreten wird; denn beim Gusseisen ist die Festigkeit gegen Zug nur $^1/_6$ bis $^1/_5$ der Festigkeit gegen absoluten Druck.

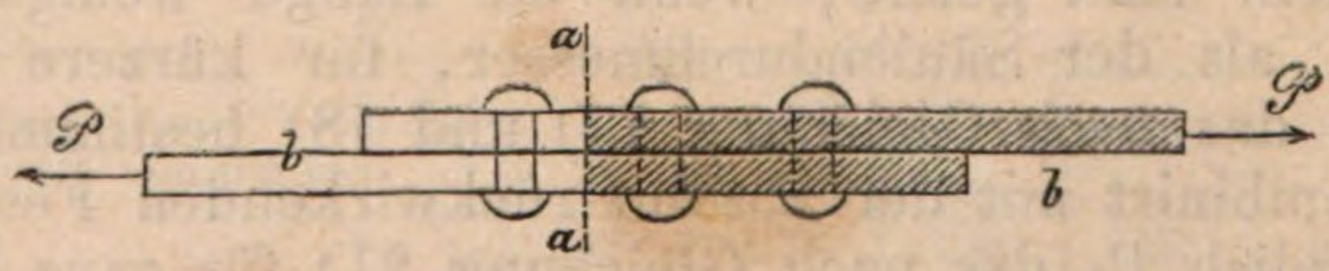
§. 5. Von der Stärke der Verbindungen.

43. Die Festigkeit einer Construction hängt wesentlich ab von der Stärke der einzelnen Verbindungen; wenn ein Bruch durch Zerreissen eines Bolzens oder einer Niete erfolgt, so ist ein Uebermaass in der Stärke der zu verbindenden Glieder ohne weiteren Nutzen und ist somit eine genaue Berechnung der einzelnen Dimensionen nur dann von Vortheil, wenn man sich über die Widerstandskraft der nothwendigen Knotenpunkte und Stösse Rechenschaft zu geben weiss.

Eine Verbindung kann entweder durch den geometrischen Zusammenhang der einzelnen Theile gebildet werden, wie diess bei vielen Holzverbindungen Statt findet, meist aber werden einzelne Zwischenstücke, wie Bolzen, Nieten u. derg. zu Hilfe genommen. — Um berechnen zu können, inwieweit die einzelnen Zwischenglieder und Theile der zu verbindenden Glieder in Anspruch genommen sind, müssen in allen Fällen die Betrachtungen der N°. **4.** zum Ziele führen, indem man sich durch die fraglichen Glieder geeignete Trennungsflächen gelegt denkt und die Gleichgewichtsbedingungen für die Summe der innern und äussern Kräfte anschreibt. — In den meisten Fällen wird diese Berechnung sehr einfach und handelt es sich in der Hauptsache darum, geeignete Trennungsflächen aufzusuchen.

44. Wir betrachten zunächst den Fall, dass 2 Stäbe nach ihrer Längenrichtung gestossen und durch Bolzen so verbunden sind, dass ein nach der Längenrichtung wirkender Zug durch diese

Fig. 33.



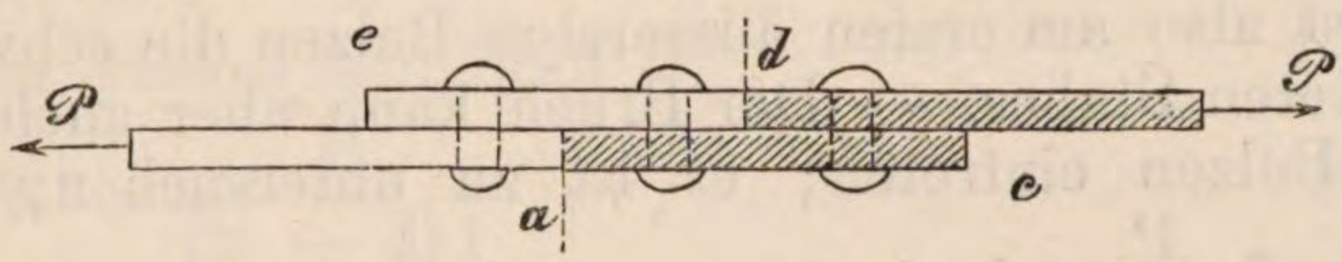
Bolzen vollständig übertragen werden muss, wie diess in beistehender Fig. 33. angedeutet ist.

Bei einem Schnitt a a senkrecht zu der zu übertragenden

Kraft P wird letztere durch die im Schnitt a a wirkenden absoluten Spannungen aufgenommen, während in einem Schnitt parallel zur Kraftrichtung die Uebertragung mittelst der längs der Trennungsfläche b b wirkenden Schubkraft Statt findet, und müssen letztere — wenn man vorläufig von der Reibung absieht — in der Querschnittfläche der auf Abscheeren in Anspruch genommenen Bolzen aufgesucht werden.

Wir machen nun die einigermaassen willkührliche Voraussetzung, dass diese 3 Bolzen, insofern sie gleichen Durchmesser haben, sich gleichförmig in die zu übertragende Kraft theilen; denn unter dieser Annahme sind die Aenderungen in der Spannung der zu verbindenden Stabenden möglichst stetig, und da anderseits sprungweise Spannungsdifferenzen sich von selbst auszugleichen bestrebt sind, so darf rückwärts auf die Zulässigkeit obiger Voraussetzung geschlossen werden.

Fig. 34.



In beistehender Fig. 34. sei durch die Schraffirung ein Schnitt a d angedeutet; betrachten wir zuerst das Stück e d des oberen Stabes, so muss der in d wirkende Zug im Gleichgewicht sein mit dem Abscheerungswiderstand der 2 am Fragment e d befestigten Bolzen; dieser Widerstand S ist für jeden der drei gleichförmig angegriffenen Bolzen je

$$S = \frac{1}{3} P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; I.$$

folglich ist der im obern Stab in d wirkende Zug Z_d durch die Gleichung gegeben

$$Z_d = 2\,S = \frac{2}{3} P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; II.$$

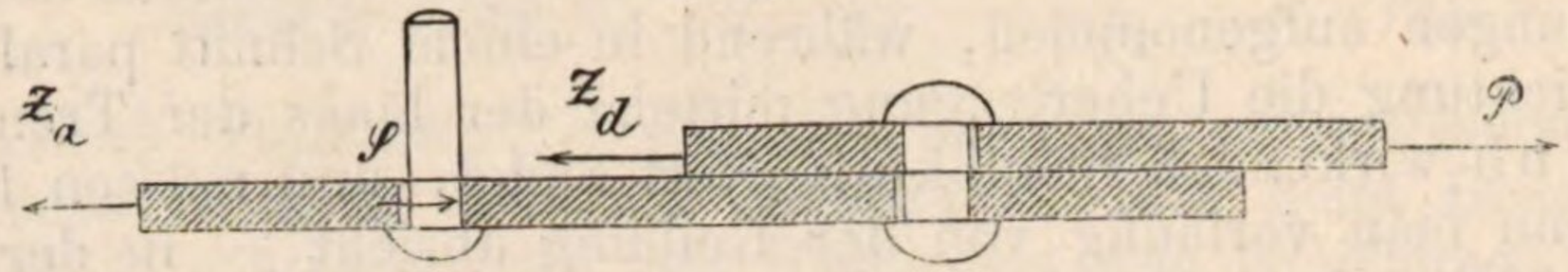
und ebenso findet man durch Betrachtung des Fragments a c für den Zug Z_a, der im untern Stab in a wirkt,

$$Z_a = 2\,S = \frac{2}{3} P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; III.$$

Die sämmtlichen im Schnitt a d parallel P wirkenden Kräfte Z_a, Z_d und S müssen eine Resultante geben, deren algebraische Summe gleich ist der Kraft P. — Die Widerstandskraft S des mittleren Bolzens wirkt — wie aus der Fig. 35. hervorgeht — den Kräften Z_a und Z_d entgegengesetzt, und ist somit nach den Bedingungen des Gleichgewichts

$$P = Z_a + Z_d - S \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; IV.$$

Fig. 35.

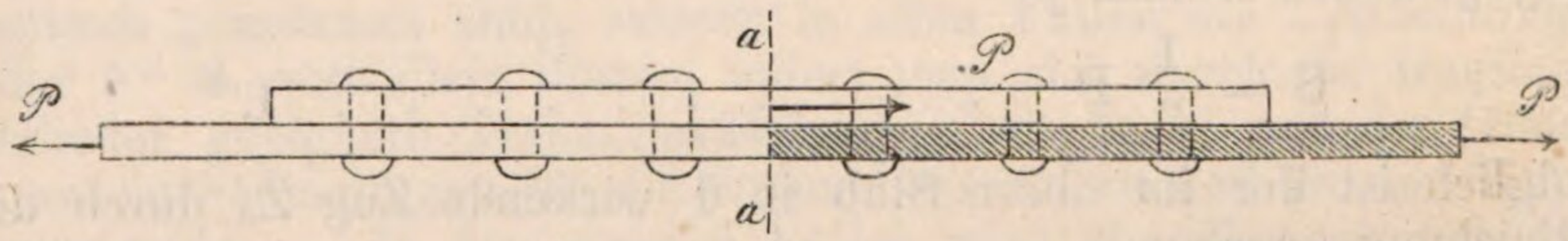


eine Gleichung, deren Richtigkeit durch Wertheinsetzung aus den Gleichungen I.—III. sofort erhellt.

In weiterer Verfolgung dieser Anschauungen finden wir die schwächsten Stellen der betrachteten Stossverbindung. — Von der linken Seite ausgehend ist der Zug im untersten Stabe zwischen dem 1. und 2. Bolzen $Z_a = \frac{2}{3} P$, zwischen dem 2. und 3. Bolzen $\frac{1}{3} P$, während unmittelbar an dem 1. äussersten Bolzen der durch die Durchbrechung verschwächte Stab den vollen Zug P auszuhalten hat; an jedem andern Punkte ist entweder der Querschnitt des Stabes grösser, oder ist die zu übertragende Kraft geringer; es ist also am ersten äussersten Bolzen die schwache Stelle des betrachteten Stabes. — Der Bruch kann aber auch durch Zerreissen der Bolzen eintreten; es ist zu untersuchen, ob letztere durch die Kraft $\frac{P}{3}$ mehr in Anspruch genommen sind, als der verschwächte Querschnitt des Stabes durch die volle Kraft P.

Wir gehen auf den allgemeinern Fall über, dass, wie in Fig. 36. angedeutet, 2 stumpf gestossene Stäbe durch eine einsei-

Fig. 36.



tige Stossplatte und beliebig viele Bolzen verbunden sind. Wir ersehen aus der Betrachtung des Schnitts a a, dass die Stossplatte in der Mitte die zu übertragende Kraft P vollständig aufnehmen muss, und ist diese Kraft P in der Stossplatte auch da noch vorhanden, wo letztere durch die a a zunächst liegenden Bolzen verschwächt ist; dort sind also die beiden schwachen Stellen der betrachteten Stossplatte. — Die gestossenen Stäbe haben ihre schwache Stelle unmittelbar an den äussersten Bolzen, die Bolzen selbst werden wieder als gleich stark und gleichförmig angegriffen betrachtet, und haben, soweit sie auf einer Seite des Stosses sich befinden, je die ganze Kraft auf die Stossplatte, beziehungsweise von da auf den zweiten Stab zu übertragen. — Ein Bruch kann in der schwachen Stelle der Stäbe, oder in den Bolzen, oder aber in der Stossplatte eintreten.

Diese dreierlei Möglichkeiten eines Bruches sollen in bestimmte Formeln gebracht werden. Wir denken uns einen Stab, der der Breite nach nur ein Bolzenloch hat, oder was dasselbe ist, wir denken uns breitere Stäbe in so viele Längenstreifen vertheilt, als der Breite nach Bolzen vorhanden sind, und bezeichnen für die in Fig. 36., beziehungsweise 33. skizzirten Stossverbindungen mit

b die Breite der zu verbindenden Stäbe oder Blechstreifen,
b' die Breite der Stossplatte (wenn eine solche vorhanden ist), beziehungsweise eines Streifens derselben,
t die Dicke der Stäbe,
t' die Dicke der Stossplatte,
d den Durchmesser der Bolzen,
n die Anzahl der an einem Stab hinter einander befindlichen Bolzen;

ferner sei

$\mathfrak{A}$ die grösste Spannung im gestossenen Stabe,
$\mathfrak{A}'$ die grösste Spannung in der Stossplatte,
$\mathfrak{C}$ die Schubspannung in den Bolzen, so ist

für den gestossenen Stab

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{(b - d)\,t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 80)$$

für die Stossplatte

$$\mathfrak{A}' = \frac{P}{(b' - d)\,t'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 81)$$

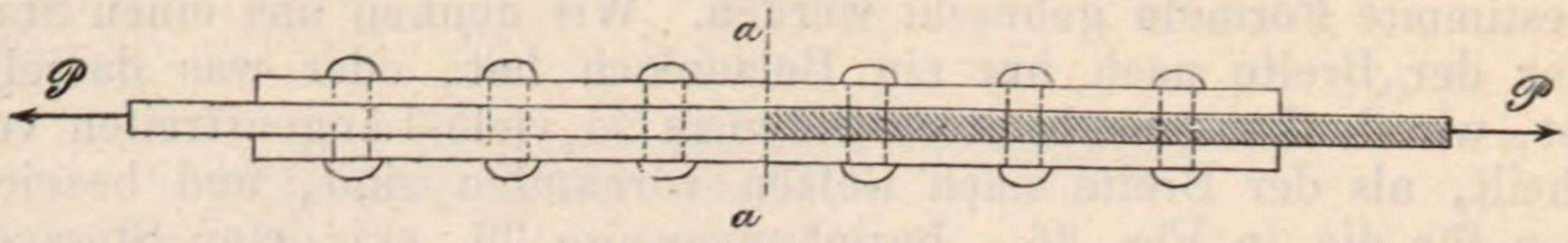
für die Bolzen

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{n} \cdot \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 82)$$

Wo in diesen 3 Gleichungen der Werth von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ oder $\mathfrak{C}$ der zulässigen Spannung oder Schubspannung am nächsten kommt, beziehungsweise dieselbe am meisten überschreitet — da ist die schwache Stelle der betrachteten Stossverbindung. — Selbstverständlich fällt für den in Fig. 33—35. gezeichneten Stoss die Gleichung 81) ganz aus. — Wir werden einen Stoss dann als richtig construirt annehmen dürfen, wenn die Spannung in dem Stab, der Stossplatte und dem Bolzen der zulässigen Spannung gleich nahe steht und wird man mit verhältnissmässig geringem Materialaufwand der Stossplatte und den Bolzen stets eine dem verschwächten Stab mindestens gleichkommende Stärke geben können.

45. Die Gleichungen 80)—82) ändern sich, wenn wie in beistehender Fig. 37. beiderseits Stossplatten angebracht sind; in dem durch die Schraffirung angedeuteten Schnitt werden nur Bolzen getroffen, jeder der letzteren ist aber zweimal geschnitten und heissen dieselben daher doppelschnittig. — Bezeichnet

Fig. 37.



n die Anzahl der zu einer Seite des Stosses a d befindlichen Bolzen,
S die Widerstandskraft eines Bolzens,
P die zu übertragende Kraft,
so ist zu setzen

$$S = \frac{1}{2n} P.$$

Behalten wir im Uebrigen die in der vorstehenden Nummer gewählten Bezeichnungen bei und bedenken, dass die beiden Stossplatten sich nunmehr in die Aufnahme der Kraft P gleichmässig theilen, so erhalten wir

für die grösste Spannung im gestossenen Stabe

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{(b - d)\,t} \quad \ldots\ldots\ldots 83)$$

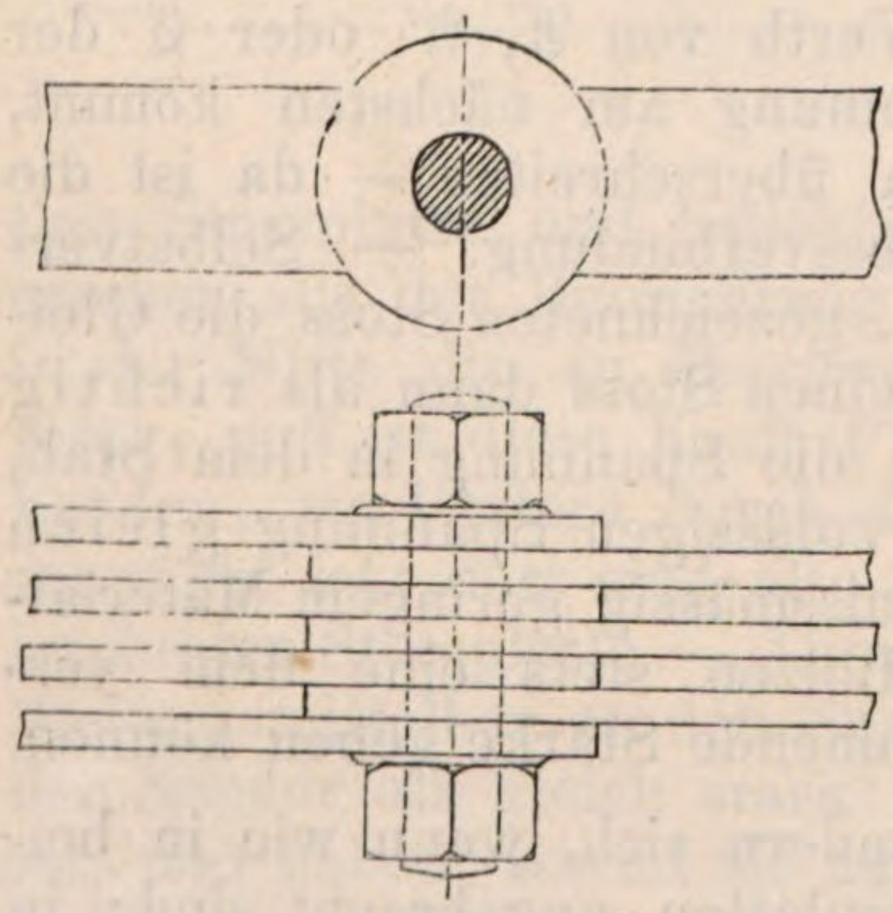
für die grösste Spannung in der Stossplatte

$$\mathfrak{A}' = \frac{\frac{1}{2} P}{(b' - d)\,t'} \quad \ldots\ldots\ldots 84)$$

für die Schubspannung in den Bolzen

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2n} \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} \quad \ldots\ldots\ldots 85)$$

Fig. 38.



Aus letzterer Gleichung folgt in Vergleichung mit Formel 82), dass ein doppelschnittiger Bolzen zweimal so viel Kraft übertragen kann, als ein ebenso starker einschnittiger Bolzen. — Es gibt aber auch 3-, 4- und mehrschnittige Bolzen, welche ebenfalls verhältnissmässig grössere Kräfte übertragen können. So ist in Fig. 38. eine Verbindung von Kettengliedern dargestellt, wo der sechsschnittige Bolzen mit jedem Schnitte je nur $\frac{1}{6}$ der zu übertragenden Kraft aufzunehmen hat.

46. Die gestossenen Stäbe sind nicht blos von rechtwinklicher Querschnittform, sondern insbesondere kommen Winkel- ⊤form Doppel-⊤form vor; ferner sind an einem Punkte oft mehrere

Stäbe gleichzeitig gestossen. — In einem solchen Fall ist jedoch darauf zu achten, dass sämmtliche Bolzen und Stossplatten so vertheilt werden, dass sie durch die angreifende Kraft P je gleichförmig in Anspruch genommen sind. Nennen wir unter dieser Voraussetzung

P die zu übertragende Kraft,

$\mathfrak{w}$ den durch die äussersten Bolzenlöcher verschwächten Querschnitt sämmtlicher an demselben Punkt gestossenen beliebig geformten Stäbe,

$\mathfrak{w}'$ den Querschnitt sämmtlicher durch die dem Stosse zunächst befindlichen Bolzen verschwächten Stossplatten,

n die Anzahl der zu einer Seite des Stosses befindlichen Bolzenschnitte (wobei also doppelschnittige Bolzen doppelt zu zählen sind),

d den Durchmesser der gleich stark vorausgesetzten Bolzen,

so ist

grösste Spannung in den gestossenen Stäben

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{\mathfrak{w}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 86)$$

grösste Pressung in den Stossplatten

$$\mathfrak{A}' = \frac{P}{\mathfrak{w}'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 87)$$

Schubspannung in den Bolzen

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{n} \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 88)$$

Sind die Bolzen nicht gleich dick, so ist zu Bestimmung von $\mathfrak{S}$ in Gleichung 88) für die Grösse $n \frac{\pi}{4} d^2$ der Gesammt-Querschnitt des zu einer Seite des Stosses befindlichen Bolzenschnitts $\mathfrak{w}_n$ einzusetzen, wodurch man erhält

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{\mathfrak{w}_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 88^a)$$

Wenn die Bolzen oder Stossplatten nicht gleichförmig in Anspruch genommen sind, so muss der Gesammt-Querschnitt in einzelne Abtheilungen zerlegt werden und müssen nach Umständen für jedes einzelne Glied die Gleichgewichtsbedingungen entwickelt werden. Häufig wird aber eine wiederholte Anwendung der Gleichungen 86) — 88) zum Ziele führen.

47. Wenn ein Constructionsglied aus mehreren neben einander liegenden Stäben zusammengesetzt ist, so werden dieselben im Allgemeinen nicht an derselben Stelle gestossen sein; der Total-Querschnitt wird also durch den Stoss eines der verbundenen Stäbe zunächst nur eine theilweise Verschwächung erleiden; wenn jedoch

der betrachtete Stoss richtig construirt ist (siehe den Schluss von N°. **44**.), so wird die Verschwächung des gestossenen Stabes durch Abzug der Bolzenlöcher vollständig berücksichtigt; dieselben Bolzen werden aber bei den meisten Constructionen auch durch die nicht gestossenen übrigen Stäbe hindurchgehen müssen, und vertheilt sich dann die Verschwächung auf den ganzen Querschnitt.

Ist die Ueberplattung eines Stosses ungenügend, so darf für den gestossenen Stab nur derjenige Querschnitt eingeführt werden, der der Stärke der Ueberplattung — Stossplatten- oder Bolzen-Querschnittsumme — entspricht, während für die übrigen nicht gestossenen Stäbe derjenige Querschnitt berechnet werden muss, welcher durch die dem Stosse zunächst liegenden Bolzen gelegt ist. — Ist gar keine Stossplatte vorhanden, so fällt der gestossene Stab in der Berechnung ganz aus und ist nur der durch die Bolzenlöcher verschwächte Querschnitt der übrigen Stäbe zu rechnen.

Letzterer Fall tritt bei den aus vielen einzelnen Stäben — Flacheisen und Winkeln — zusammengesetzten Gurtungen häufig ein, weil die Anbringung der vielen Stossplatten sehr unbequem werden kann; werden jedoch bei zusammengesetzten Stäben Stossplatten angewendet, so darf man bei guten Constructionen annehmen, dass die Stossplatten nach Querschnitt und Bolzenanzahl genügend bemessen sind, und findet die in die Rechnung einzuführende Querschnittfläche des betrachteten zusammengesetzten Constructionsglieds dadurch, dass man von dem Gesammt-Querschnitt sämmtlicher Stäbe die in derselben Ebene befindlichen zahlreichsten Bolzenlöcher abzieht.

48. Bei vorstehenden Betrachtungen war vorausgesetzt, dass die zu verbindenden Stäbe durchweg gleiche Breite und Dicke haben, so dass eine Verschwächung der Stäbe durch die Bolzen nothwendig eintreten musste; diese Verschwächung kann aber dadurch vermieden werden, dass man die Stäbe an den zu verbindenden Enden erbreitet oder verdickt. — Vorstehende Fig. 38. (s. oben) zeigt eine derartige Anordnung, wie sie bei Kettenbrücken üblich ist, und hat man hiebei darauf zu sehen, dass nirgends eine Trennungsfläche möglich ist, welche kleiner als der Stab-Querschnitt wäre.

Die Formeln 80)—85), beziehungsweise 86)—88), können aber auch auf Stäbe mit verstärkten Enden Anwendung finden, indem man in diese Formeln die verstärkten Querschnittdimensionen der Stabenden einführt.

49. Wenn die gestossenen Stäbe einem gemeinsamen Druck nach ihrer Längenrichtung zu widerstehen hätten, so würde bei der in Fig. 33—35. dargestellten Anordnung die Uebertragung der Kraft ganz in derselben Weise erfolgen, wie bei gezogenen Stäben;

anders verhält es sich, wenn die Stäbe stumpf gestossen und mit Stossplatten verbunden sind; wenn nämlich die Enden genau auf einander passen, so kann die Kraft durch directen Druck ohne Vermittlung der Bolzen übertragen werden. Dieses genaue Anpassen wird aber in Folge von Mängeln in der Ausführung, sodann insbesondere in Folge von Temperaturänderungen nur unvollständig oder häufig gar nicht vorhanden sein; man wird also auch hier eine genügende Bolzenverbindung nicht missen können und wird dieselbe häufig in derselben Weise wie bei gezogenen Stäben anbringen; diess gilt namentlich von solchen Constructionen, wo ein Theil der Glieder abwechslungsweise auf Stoss und Druck in Anspruch genommen ist und wo somit eine beständige Aenderung des geometrischen Zusammenhangs vor sich geht. Wo man aber, wie bei ständig belasteten Säulen, auf einen unmittelbaren Contact der gedrückten Theile mit Sicherheit rechnen kann, da wird man die Verbindungsbolzen möglichst verringern, und eben damit die Verschwächung des gestossenen Stabes auf ein Minimum zurückführen.

50. Sehr wichtig und von umfassender Anwendung sind im Brückenbau die Nietverbindungen; es sind desshalb auch sehr vollständige Untersuchungen über die Widerstandsfähigkeit derselben vorhanden.

Der Widerstand der Nietbolzen setzt sich aus der Abscheerungsfestigkeit derselben und der zwischen den verbundenen Stäben herrschenden Reibung zusammen; letztere wird bei warmer Nietung durch das bei der Erkaltung eintretende starke Zusammenziehen in sehr hohem Grade hervorgerufen; schon beim Baue der Britanniabrücke wurden directe Versuche über den numerischen Betrag dieser Reibung angestellt, indem man den Bolzen so viel Spielraum liess, dass das Verschieben der verbundenen Platten zunächst nur durch die Reibung verhindert werden konnte. — Man fand 1200—1300 Kilo per □Centimeter des Nietbolzen-Querschnitts als Reibungswiderstand, während die absolute Festigkeit des verwendeten Eisens 3776 Kilo per □Centimeter betrug.

Anderseits hat man gefunden, dass eine gewöhnliche, sorgfältig hergestellte warme Niete per Quadrateinheit incl. Reibung einen Widerstand zeigt, welcher der absoluten Festigkeit des verwendeten Eisens (im obigen Falle 3776 Kilo per □Cent.) gleichkommt. — Man könnte hieraus schliessen, dass die nach Abzug der oben berechneten Reibung noch verbleibende Abscheerungsfestigkeit per Quadrateinheit ansehnlich kleiner als die absolute Festigkeit des fraglichen Materials und beziehungsweise nur $^2/_3$ derselben sei; man muss aber wohl im Auge haben, dass ein Nietbolzen nicht gleichförmig auf seiner ganzen Querschnittfläche in Anspruch genommen ist, dass vielmehr in Folge des unvollkommenen Contactes einzelne Theile mehr, andere weniger auszuhalten

haben, so dass die grösste Schubspannung bei diesen Versuchen dennoch der absoluten Festigkeit des Materials gleichgekommen sein mochte.

Ohne jedoch näher untersuchen zu müssen, in welcher Weise der Gesammtwiderstand sich aus der Reibung und der Abscheerungsfestigkeit zusammensetzt, genügt für uns die obige Thatsache, dass sorgfältig hergestellte warme Nieten per Quadrateinheit ihrer Querschnittfläche einen der absoluten Festigkeit gleichkommenden Widerstand gegen Abscheeren (incl. Reibung) zeigen. — Mit Rücksicht auf die in der Ausführung nicht zu vermeidenden Ungenauigkeiten haben einzelne Ingenieure nur $^3/_4$ oder $^2/_3$ der absoluten Festigkeit für den Nietenwiderstand angenommen; letzterer Werth erscheint aber bei guter Ausführung offenbar zu gering; wenn man ausserdem bedenkt, dass das Nieteisen gewöhnlich besserer Qualität ist, als das verbundene Walzeisen, so wird für sehr sorgfältige Ausführung der per Quadrateinheit berechnete Nietenwiderstand $\mathfrak{C}$ der absoluten Festigkeit des Materials $\mathfrak{A}$ gleich zu setzen sein; im Uebrigen aber muss es jedem Constructeur überlassen sein, das Verhältniss $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ dem vorliegenden Falle anzupassen; dieses Verhältniss $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ dürfte zwischen $^3/_4$ und 1 variiren.

Einige Ingenieure halten die warme Nietung für unzuverlässig weil die Nieten nach dem Erkalten die Nietlöcher nicht mehr vollständig ausfüllen, und wenden kalte, genau abgedrehte (theilweise schwach konische) Nietbolzen an, von welchen ein dichter Verschluss und ein gleichmässiger Widerstand zu erwarten ist; anderseits ist aber die Reibung bei kalter Nietung entschieden geringer und wird auch hier die Summe beider Widerstände den Betrag der absoluten Festigkeit (oder theoretischen Abscheerungsfestigkeit) nicht übersteigen, und indem auch hier Unvollkommenheiten in der Ausführung nicht zu vermeiden sind und wenn auch seltener, doch jeweils empfindlicher sein werden — so glauben wir, dass auch bei kalter Nietung im Allgemeinen kein grösserer Nietenwiderstand gerechnet werden darf. — Die richtigste Anwendung findet die kalte Nietung wohl da, wo die warme Nietung anderer Umstände halber und insbesondere wegen zu grosser Dicke der zu verbindenden Stücke nur mangelhaft und ungenügend ausgeführt werden kann.

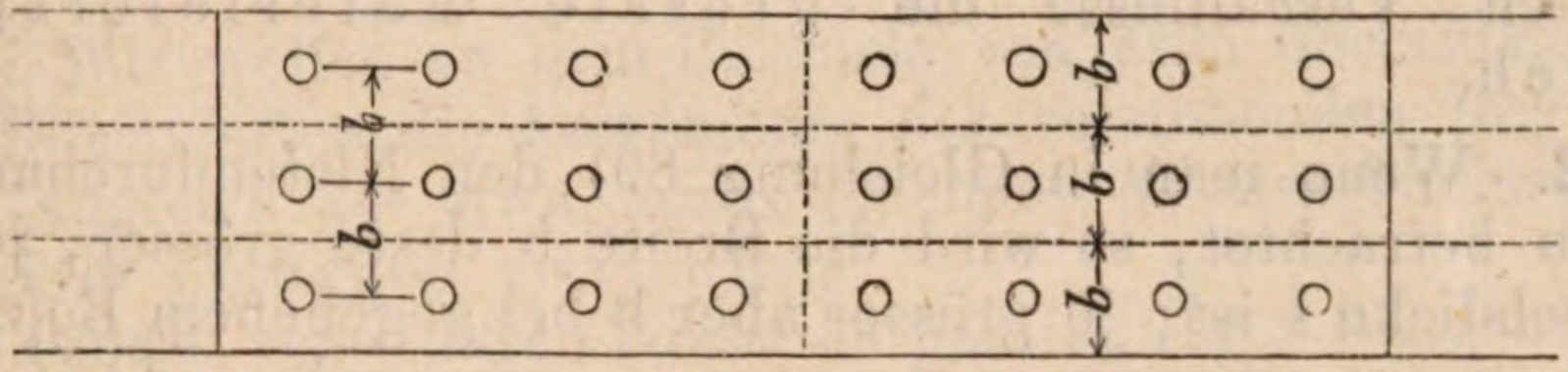
51. Die obigen allgemeinen Formeln 80)—88) finden auch für Nietenverbindungen unbedingte Anwendung und haben nur insoweit eine nähere Präcisirung erfahren, als wir für das Verhältniss $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ die Grenzen $^3/_4 - 1$ in der vorhergehenden Nummer angegeben haben.

Bei der ungemein grossen Anzahl Nieten, welche bei den von gewalztem Schmiedeisen hergestellten Constructionen angewendet

werden, ist aber ein richtiges Verhältniss zwischen dem Durchmesser der Nieten und ihrer Zahl und Entfernung von grosser Wichtigkeit.

Denken wir uns den sehr einfachen Fall, dass die Nieten, wie in Fig. 39. dargestellt, nach der Längenrichtung der zu verbindenden Platten je direct hinter einander angebracht sind, so kann man sich, wie in den Formeln 80) — 85) vorausgesetzt ist, die

Fig. 39.



Platte in einzelne Längenstreifen von der Breite b zerlegt denken; bezeichnet nun im Uebrigen

P die von einem Streifen zu übertragende Kraft,
t die Dicke des gestossenen Blechs,
n die Anzahl der hinter einander befindlichen Nieten,
d den Durchmesser der Nieten,

so folgt für einseitige Stossplatten und somit einschnittige Nieten nach Gleichung 80) und 82)

Spannung im gestossenen Stab

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{(b - d)\,t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Schubspannung in den Nietbolzen

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{n}\,\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

woraus durch Elimination von P folgt

$$(b - d)\,t = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}}\,n \,.\, \frac{\pi}{4} \,.\, d^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 89)$$

und gibt diese Gleichung nach d aufgelöst

$$d = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{S}} \cdot \frac{2}{n\pi}\left\{-t \pm \sqrt{\frac{n\pi bt}{\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{S}}\right)} + t^2}\right\} \quad . \quad 90)$$

Dieselben Gleichungen 89) und 90) gelten für beiderseitige Stossplatten und somit doppelschnittige Nieten, wenn man für n durchweg den Werth 2 n einsetzt; somit ist für dieselben

$$(b - d)\,t = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}}\,2n\,\frac{\pi}{4}\,d^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 89^a)$$

wie

$$d = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} \cdot \frac{1}{n\pi} \left\{ - t \pm \sqrt{\frac{2\,n\pi}{\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}\right)} bt + t^2} \right\} 90^a)$$

Wenn man also ein bestimmtes Verhältniss $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ annimmt, so kann man nach den Gleichungen 89)—90^a) stets b, d oder t so bemessen, dass die gestossenen Platten und die Nietbolzen gleich in Anspruch genommen sind und ist bei Einhaltung der hiedurch bedingten Verhältnisse die grösste Materialersparniss möglich.

52. Wenn man in Gleichung 89) den Nietendurchmesser als gegeben betrachtet, so wird die Breite b desto grösser, je kleiner die Blechdicke t ist; je grösser aber b bei gegebenem Bolzendurchmesser ist, desto mehr nähert sich der Bruch $\frac{b - d}{b}$ der Einheit, desto geringer ist die Verschwächung des Blechs. Abgesehen davon, dass die einzelnen Dimensionen durch die verschiedenartigsten Umstände bedingt sein können, ist die unbegrenzte Verringerung des Verhältnisses $\frac{t}{d}$ durch besondere Rücksichten verhindert.

Ist nämlich $\frac{t}{d}$ sehr klein, so kann die Fläche dt, mit der der Nietbolzen gegen die Lochwandung anliegt, für den zu übertragenden Druck zu gering sein; letzterer ist proportional dem Bolzen-Querschnitt $\frac{\pi d^2}{4}$ anzunehmen (insofern eine möglichst starke Anstrengung des Bolzens vorausgesetzt ist) und muss die Fläche dt einen gewissen Bruchtheil des Bolzen-Querschnitts $\frac{\pi d^2}{4}$ erreichen, wenn die Lochwandung den Bolzendruck aushalten soll; andernfalls würde eine Zerstörung des Lochrandes beginnen. Hr. Ingenieur Gerber hat hiefür die praktische Regel aufgestellt

$$\left.\begin{aligned} dt &\geqq \frac{4}{10} \frac{\pi d^2}{4} \\ t &\geqq \frac{\pi}{10} d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 91)$$

d. h. die Bolzendicke soll wenig mehr als das Dreifache der Dicke der zu verbindenden Platten betragen.

Wenn die durch Gleichung 91) bestimmte Regel beobachtet wird, können dünne Blechplatten für Nietverbindungen unbedingt empfohlen werden, sobald dafür gesorgt ist, dass die gedrückten Theile nicht einknicken oder sich werfen können; insbesondere

haben dünne Platten den Vortheil, dass wenn mehrere Blechlagen nebst Stossplatten sich übereinander befinden, die Länge des Nietbolzens nicht zu gross wird; es soll die Länge des Nietbolzens zwischen den Köpfen nicht mehr als 15—18 Centim. betragen; Nieten von grösserer Länge zerreissen häufig beim Erkalten und ist zu fürchten, dass eine Beschädigung auch dann eingetreten ist, wenn kein Bruch sichtbar ist. — Regel ist, den Nieten wo möglich nur 10 C. und höchstens 15 C. Länge zwischen den Köpfen zu geben.

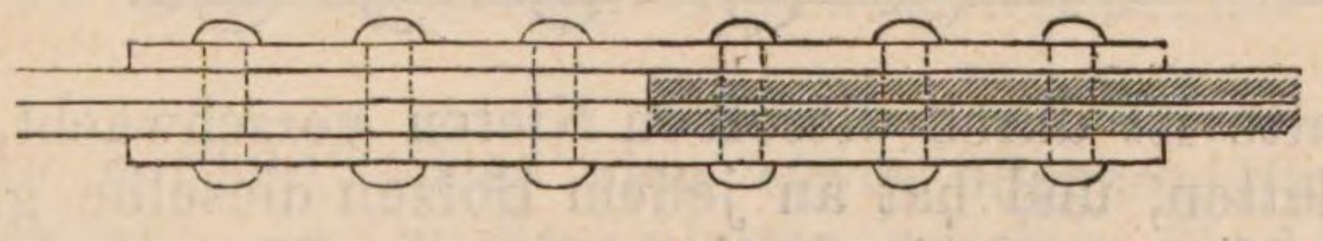
53. Wir wollen an dem Beispiele von zwei übereinander liegenden Blechplatten die Anwendung der vorstehenden Regeln zeigen und zugleich die etwa anzuwendenden Stossverbindungen bezüglich ihrer Festigkeit vergleichen.

Die Bleche seien durch Nieteisen parallel ihrer Längenrichtung verbunden, so dass wir einen Streifen von der Breite der Nietendistanz als Maassstab der Berechnung herausnehmen können. Wir setzen

die Plattendicke $t = 1{,}5$ C.,
die seitliche Distanz der Nieten (Blechbreite) $b = 15$ C.,
die Zahl der hintereinander befindlichen Nieten $n = 3$,
endlich sei in den Formeln 89)—90[a]) $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}} = 1$.

Fall 1. Die beiden Blechplatten sind, wie in Fig. 40. gezeichnet, an demselben Punkte gestossen. — Die beiderseits angebrachten Stossplatten müssen je dieselbe Dicke t erhalten, wie die gleich breiten gestossenen Platten; die Nieten sind doppelschnittig, somit findet man als günstigsten Bolzendurchmesser nach Gleichung 90[a]), indem die doppelte Plattendicke in die Formel eingesetzt werden muss,

Fig. 40.

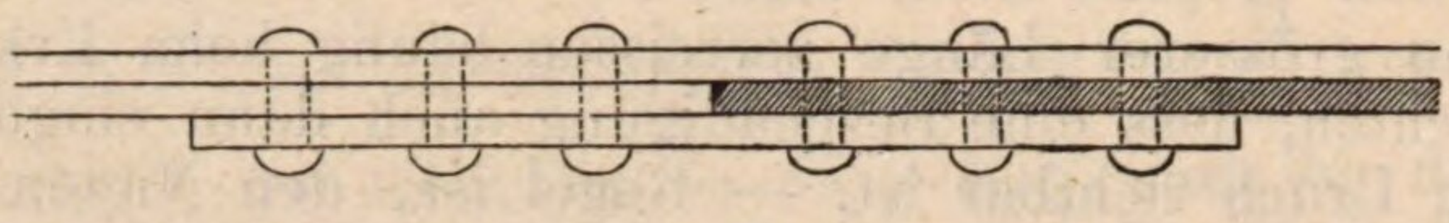


$$d = \frac{2}{6\pi}\left\{-3 \pm \sqrt{6 . \pi . 3 . 15 + 3 . 3}\right\}$$
$$d = 2{,}79 \text{ Cent.}$$

Die Verschwächung des Stabs beträgt $\frac{d}{b} = \frac{2{,}79}{15} = \frac{1}{5{,}37}$ und der in die Rechnung einzuführende verschwächte Querschnitt ist $\frac{b-d}{b}\omega = 0{,}814\,\omega$, wenn der unverschwächte Querschnitt des Stabes mit ω bezeichnet wird.

Fall 2. Von den beiden Blechplatten sei, wie in Fig. 41. dargestellt, nur die eine gestossen und durch eine einseitige Stoss-

Fig. 41.



platte von gleicher Dicke t ersetzt. — Die Nieten sind einschnittig und Formel 90) gibt als günstigsten Bolzendurchmesser

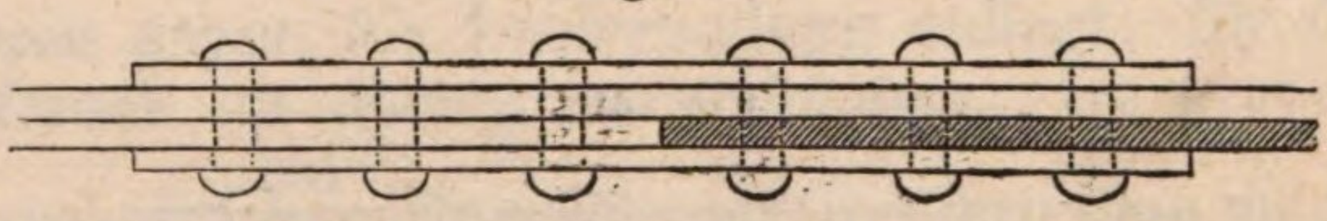
$$d = \frac{2}{2\pi}\left\{-1{,}5 \pm \sqrt{3\pi \,.\, 1{,}5 \,.\, 15 + 1{,}5^2}\right\} \text{ Cent.}$$

$$d = 2{,}79 \text{ C.}$$

wie in Fall 1., wie hätte zum Voraus angenommen werden dürfen, da die einschnittigen Nieten des 2. Falls die Hälfte der doppelschnittigen Nieten des 1. Falls auszuhalten haben. Die Verschwächung der gestossenen Platte beträgt wie oben $\frac{1}{5{,}37}$; da dieselben Bolzen auch das nicht gestossene Blech durchdringen, so ist diese Verschwächung für den ganzen Querschnitt der doppelten Blechlage zu nehmen.

Fall 3. Wie in Fig. 42. gezeichnet, sei nur ein Blech gestossen, aber mit beiderseitigen Stossplatten versehen. — Die durch-

Fig. 42.



laufende Platte ist durch dieselben Nieten verschwächt, wie die gestossenen Platten, und hat an jedem Bolzen dieselbe grösste Spannung zu erleiden, welche die gestossenen Platten an den äussersten Bolzen auszuhalten haben. Die Stossplatten und Nieten dienen als Ersatz für die eine Plattenlage und haben die beiden Stossplatten je die halbe Dicke der gestossenen Platten. Der günstigste Nietbolzendurchmesser berechnet sich nach Gleichung 90[a]) wie folgt:

$$d = \frac{2}{6\pi}\left\{-1{,}5 \pm \sqrt{6\pi \,.\, 1{,}5 \,.\, 15 + 1{,}5^2}\right\} \text{ Cent.}$$

$$d = 2{,}03 \text{ C.}$$

Die Verschwächung des Stosses beträgt $\frac{2{,}03}{15} = \frac{1}{7{,}39}$ und der in die Rechnung einzuführende Querschnitt ist $\frac{12{,}97}{15} = 0{,}865$ des ungeschwächten Querschnitts ω. — Wir machen hier darauf aufmerksam, dass es keineswegs genügt hätte, den Nieten-Querschnitt halb so gross zu machen, wie in den Fällen 1. und 2.; gerade

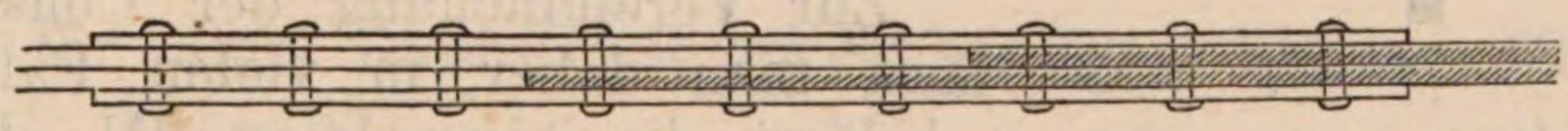
weil die Verschwächung im Falle 3. geringer ist, als in den beiden ersten Fällen, so müssen auch die Nieten, welche dieselbe Kraft auszuhalten haben, verhältnissmässig stärker sein.

Die entschiedene Ueberlegenheit des in Fig. 42. gezeichneten Stosses gegenüber der Anordnung Fig. 41. wurde schon beim Baue der Britanniabrücke gefunden; E. Clarke suchte sich diess dadurch zu erklären, dass er annahm, dass bei letzterer Anordnung die Kraft durch die Bolzen zur Hälfte in die Stossplatte, zur Hälfte in das nicht gestossene Blech übergehe; letzteres würde dann am Stoss $^3/_2$ der auf seine übrige Länge wirkenden Kraft zu übertragen haben; diese Anschauung würde aber voraussetzen, dass die nicht gestossene Platte sich zwischen den Nietbolzen weit mehr ausdehnt, als die anliegenden gestossenen Platten, und erscheint es richtiger, die Nieten in Fig. 41. als einschnittige zu behandeln.

Der Verbrauch an Stossplatten ist in den 3 Fällen 1—3. durchweg gleich; an Nietengewicht wird im Falle 2. am meisten, im Falle 1. und 3. annähernd je halb so viel nothwendig; um an Nieten- und Stossplattengewicht zu sparen, hat Stephenson beim Baue der Britanniabrücke eine besonders sinnreiche Stossverbindung angewendet, nämlich:

Fall 4. Wie aus Fig. 43. ersichtlich, wechseln die Stösse ab und sind beiderseits Stossplatten angebracht; die Stösse sind sich

Fig. 43.



aber so nahe gerückt, dass eine etwas längere Stossplatte je 2 Stösse überdeckt. — Die Stossplatten erhalten die halbe Blechstärke als Dicke und in einem Schnitt in der Mitte der Stossplatten haben Blechplatten und Stossplatten je $^1/_4$ der Kraft zu übertragen. — Die Verschwächung des Stosses ist dieselbe wie im Falle 3.; aber es ist gegenüber letzterem Falle nur $^3/_4$ des Gewichts an Nieten und Stossplatten nothwendig, und zudem ist die Doppelblechlage auf eine grössere Länge von Deckplatten frei und zu Befestigung anderer Constructionsglieder geeigneter.

54. Wie aus der vorhergehenden Nummer des Näheren nachgewiesen, sind die Stossplatten, wenn thunlich, beiderseits anzubringen. Diess hat bei Querschnitten, welche aus vielen Stücken zusammengesetzt sind, Schwierigkeiten, zumal für die Stösse der Winkel; in beistehender Fig. 44. sind die beiderseitigen Stossplatten für den gleichzeitigen Stoss zweier Winkel und in Fig. 45. für den Stoss eines Winkels eingezeichnet; letztere Anordnung wird ihrer Unregelmässigkeit wegen nicht gerne gewählt werden,

während der gleichzeitige Stoss beider Winkel verhältnissmässig stärkere Nieten erfordert (wie bei Fall 1. in N°. **53**.); nur selten

Fig. 44.

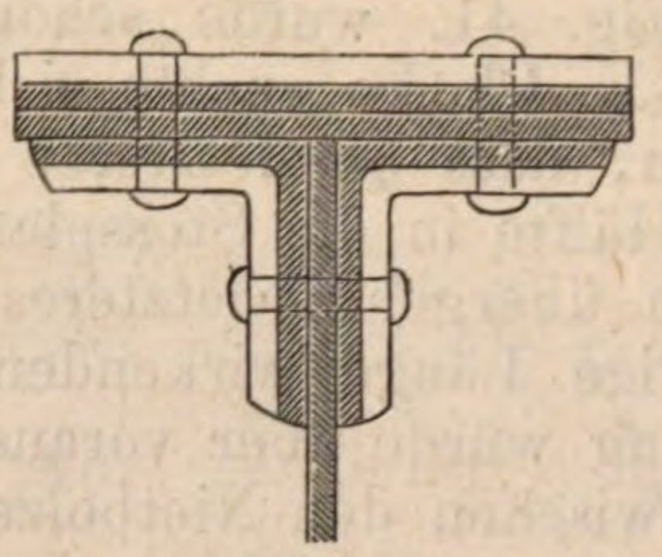
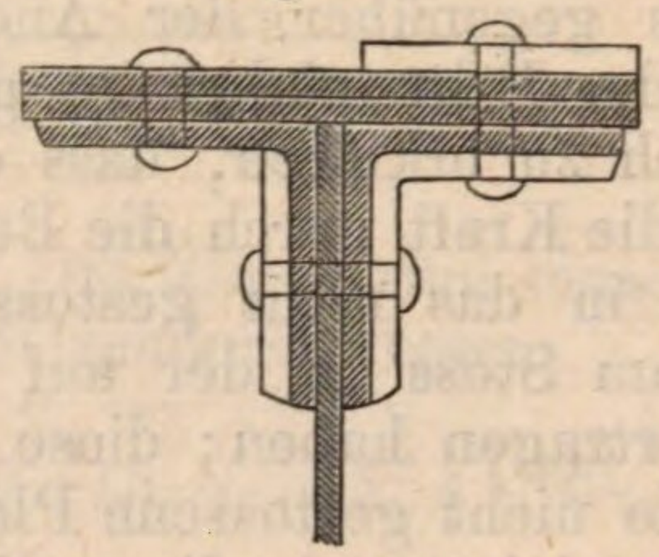
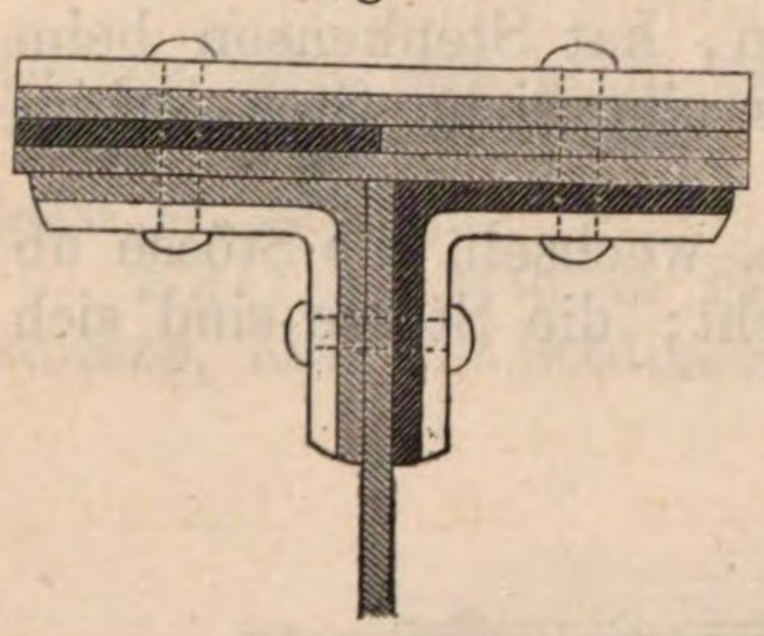


Fig. 45.



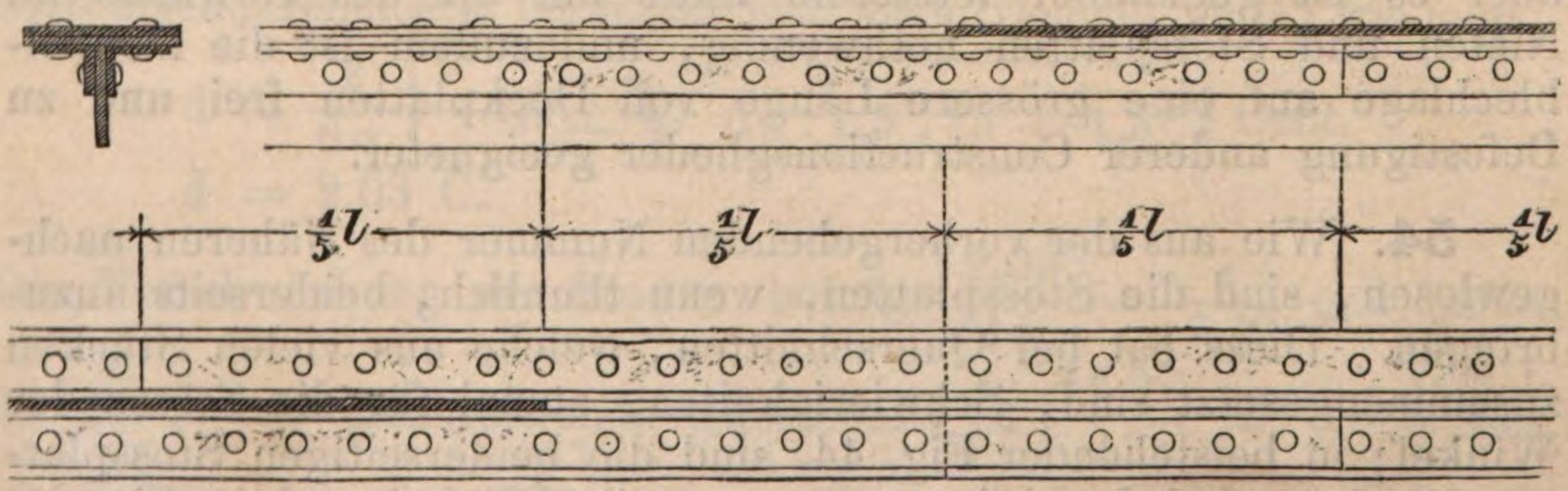
wird man in der Lage sein, durch Zerlegung einer Kopfblechlage, wie in Fig. 46. angedeutet, beiderseitige Stossplatten in symmetrischer Weise anzuwenden und sich zugleich den Vortheil zu wahren, dass die doppelschnittigen Bolzen nur je eine Blechdicke zu ersetzen haben. — Letztere Anordnung zeigt auch schon ein Beispiel von dem Aufeinanderpacken von 6 Blechlagen, was bei stärkeren Blechen unzulässig ist und in jedem Falle besondere Vorsicht in der Ausführung erheischt.

Fig. 46.



Zur Vereinfachung der Construction lässt man daher in vielen Fällen die Stossplatten ganz weg und lässt die einzelnen Blechlagen einander in der Weise überbinden, dass dieselben einander gegenseitig als Stossplatten dienen; selbstverständlich dürfen aber dann von m neben einander liegenden Stäben nur m — 1 Stäbe als tragend gerechnet werden, und ist

Fig. 47.



auch von diesen m — 1 Stäben die Verschwächung durch die Nietlöcher noch in Abzug zu bringen. — Wenn eines der Glieder stär-

ker ist als die andern, so müsste man gerade diesen stärkern Stab vom Gesammt-Querschnitt in Abzug bringen, wenn man nicht die Vorsicht gebraucht, diesen stärkern Stab an seinem Stosse wenigstens theilweise durch eine Stossplatte zu ergänzen. — Wenn man, wie in Fig. 47. angedeutet, mit den Stössen regelmässig abwechselt, so müssen die zwischen 2 Stössen befindlichen Nieten gerade ausreichen, einen der gestossenen Stäbe ersetzen; diese Nieten sind blos als einschnittige zu rechnen; es hat diess hier weniger Nachtheil, da man meist Raum genug hat, eine grössere Anzahl schwächerer Nieten hinter einander anzubringen. — Ganz ähnlich mussten auch in Fig. 43. die mittleren 3 Nieten der Stärke eines der gestossenen Bleche entsprechen, doch genügte im letztern Falle für die doppelschnittigen Nieten zusammen die Hälfte des zu ersetzenden Blech-Querschnitts.

55. Wir stellen im Folgenden die für Stösse der Nietenverbindungen gewonnenen Sätze übersichtlich zusammen:

1) Wenn ein Stoss mit einer Stossplatte bedeckt ist, welche selbst genügend stark und mit hinreichend vielen Nieten versehen ist, so bestimmt sich die Verschwächung des Stosses dadurch, dass man in einem Schnitte zunächst dem Stossplattenrande die Nietenlöcher vom Gesammt-Querschnitt in Abzug bringt.
2) Um zu untersuchen, ob die Stossplatten genügend stark und mit hinreichend vielen Nieten versehen sind, dienen
   für flache Bleche mit einschnittigen Nieten: Gleichung 80) — 82),
   für ditto Bleche mit zweischnittigen Nieten: Gleichung 83) — 85),
   für beliebige Querschnitte: Gleichung 86) — 88).
3) Zur Bestimmung der günstigsten Materialanordnung für die Stösse flacher Blechplatten dienen die Gleichungen 89) und 90), beziehungsweise 89ª) und 90ª), und zwar bestimmt sich insbesondere der Nietendurchmesser nach Gleichung 90) und 90ª).
4) Wenn keine Stossplatten angewendet werden, so lässt man die einzelnen Stäbe sich gegenseitig überbinden und sind dann von m neben einander liegenden Stäben je nur m — 1 als wirksam zu rechnen (s. Fig. 47.), und zwar sind von den m — 1 Stäben die in demselben Querschnitt zunächst dem Stosse befindlichen Nietenlöcher gleichfalls in Abzug zu bringen.

56. Wenn mehrere Glieder an einem Knotenpunkte vereinigt sind, so ist darauf zu achten, dass die Anzahl und Grösse der Bolzen für jedes Glied nach der Stärke desselben richtig bemessen werden. — Treffen mehrere Bleche an einem Punkte zusammen, so erhalten sie gewöhnlich gemeinsame Stossplatten. — Fig. 48. stellt einen derartigen Stoss dar, wie er bei den schmied-

eisernen Bogenbrücken angewendet wird; man sieht oft eine ungemeine Nietenanzahl auf einem Knotenpunkte vereinigt, indem die Gesammtzahl der Nietenschnitte (doppelschnittige Nieten doppelt gerechnet) dem durch die Nietlöcher verschwächten Querschnitt sämmtlicher am Knotenpunkte sich vereinigenden Glieder mindestens gleich sein muss.

Wenn ein Stab an einem anderen durchlaufenden Glied befestigt ist, wie diess z. B. bei Gitterstäben der Fall ist (s. Fig. 49), so muss die Nietenanzahl dem anzuheftenden Stabe entsprechend

Fig. 48.

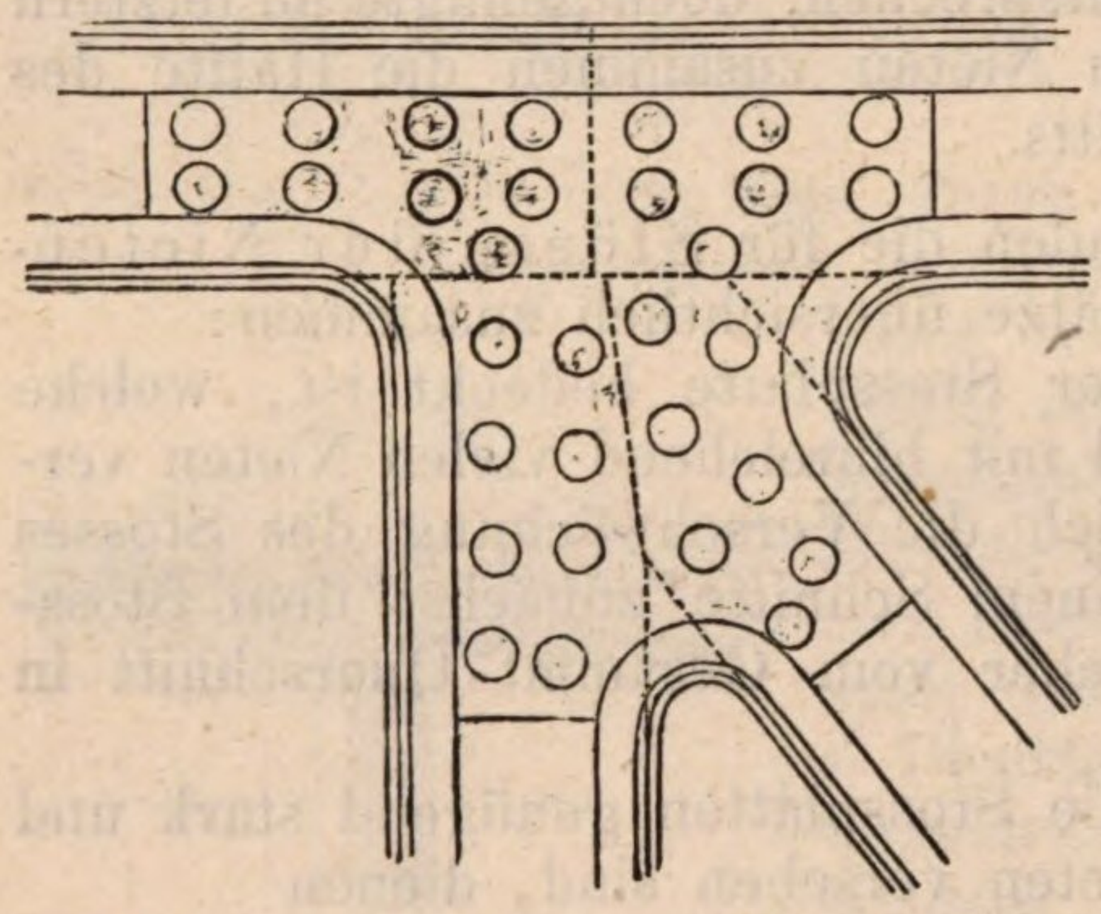
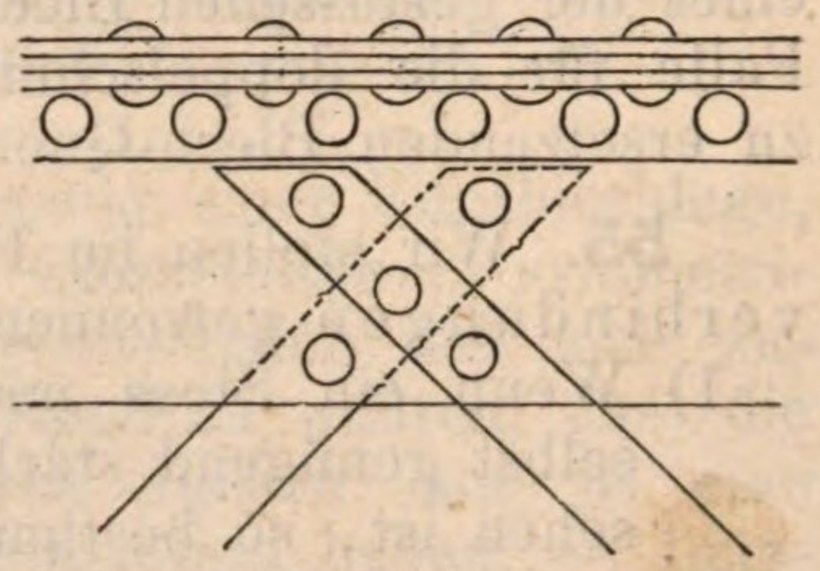
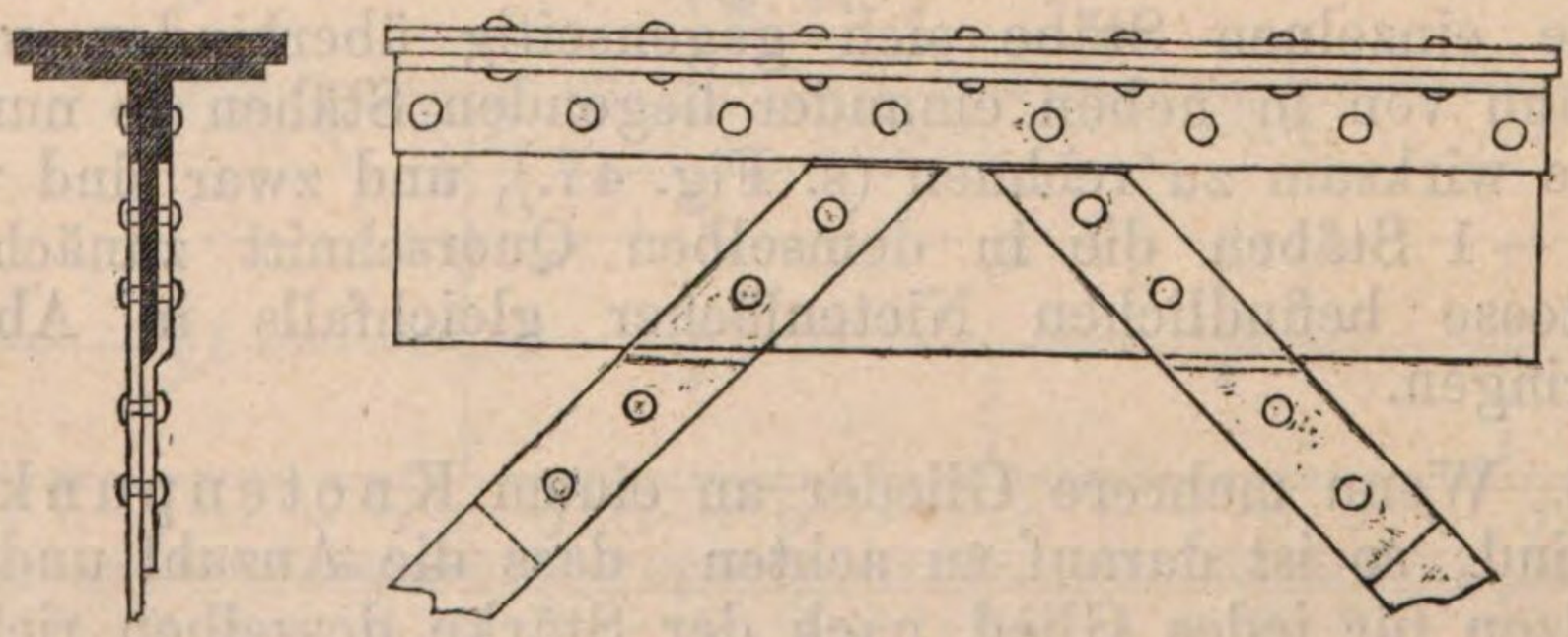


Fig. 49.



sein; sind z. B., wie diess meist der Fall ist, die Nieten nur einschnittig, so muss der Querschnitt der Nieten zusammen mindestens so gross sein, als der durch den oder die Nietbolzen verschwächte Stab, so dass man wo möglich mehrere Nieten hinter einander anbringt; einige Ingenieure haben auch bei Gitterstäben doppelschnittige Nieten dadurch hergestellt, dass sie die Wandbleche mit besonderen Beilagen umfassten (s. Fig. 50.).

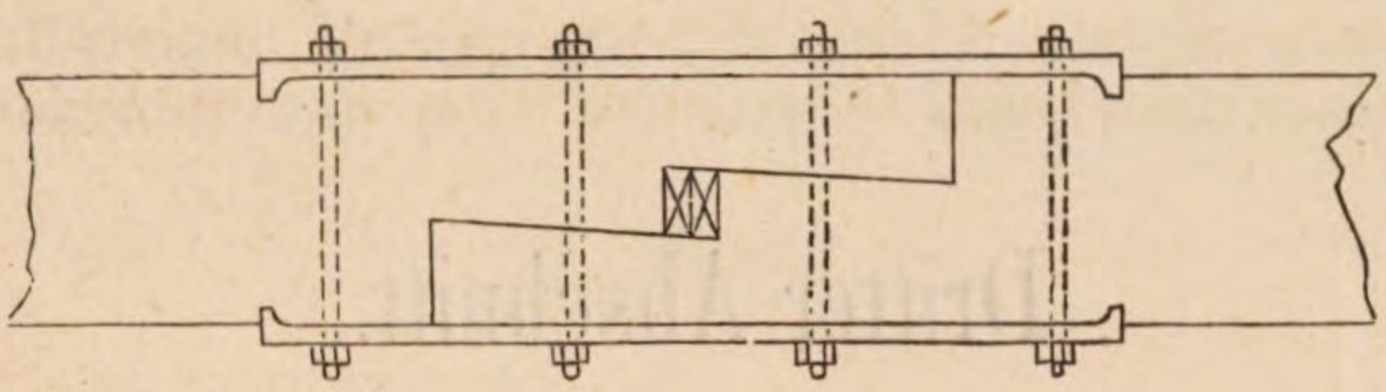
Fig. 50.



57. Stösse von Hölzern, welche auf Zug in Anspruch genommen sind, sind schwierig befriedigend herzustellen; wenn man die Verbindung blos mit Eisenplatten herstellen will, so wird nur

ein verhältnissmässig kleiner Theil des Holz-Querschnitts von den Verbindungsbolzen oder der Deckplatte getroffen; man muss dann wohl immer auf die durch die Schraubenbolzen hervorgerufene Reibung rechnen. Beiliegende Fig. 51. zeigt einen Stoss, wo das Ineinandergreifen des Holzes durch Deckplatten unterstützt wird;

Fig. 51.



es greifen die Ansätze der letzteren in das Holz ein, die schiefen Flächen der Holzenden stemmen sich gleichfalls der Bewegung entgegen und beide Widerstände werden durch die Bolzenreibung unterstützt.

Dritter Abschnitt.

Bestimmung der Vertikalkräfte und der Angriffsmomente.

---

§. 6. Frei aufliegender Träger.

58. Wenn ein Träger auf zwei Endpunkten frei aufliegt, so werden sämmtliche Gewichte nach dem Hebelgesetz auf die beiden Auflager übertragen und können daher die Auflagerdrücke stets mathematisch genau bestimmt werden, sobald das Gesetz der Belastung bekannt ist.

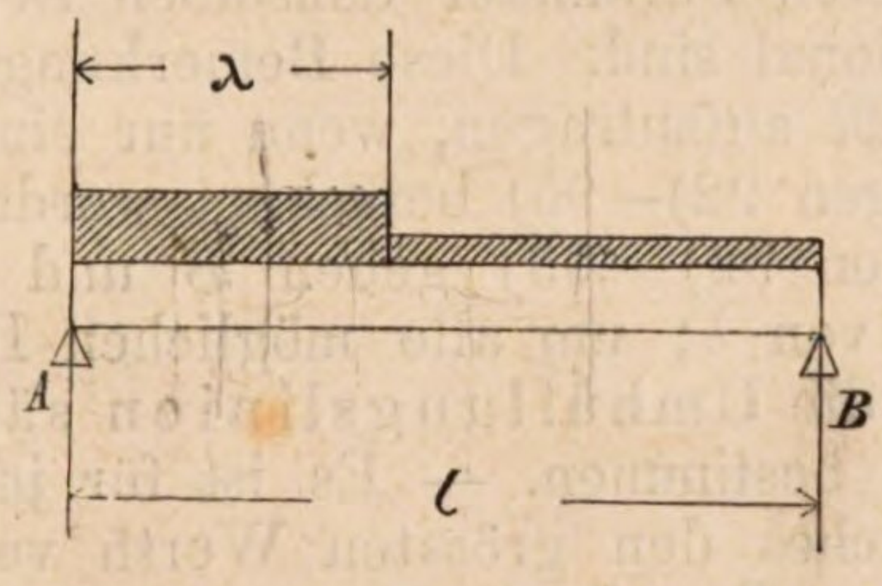
Das Eigengewicht einer Brücke oder eines Trägers dürfen wir immer auf die ganze Länge gleichmässig vertheilt annehmen, und bezeichnen wir dasselbe, auf die Längeneinheit reducirt, mit p. — Die über eine Brücke sich bewegende zufällige Last kann zwar auf ganz verschiedene Weise auf der Brücke vertheilt oder auch auf einzelnen Punkten derselben concentrirt sein; letzterer Fall kommt namentlich bei Strassenbrücken in Betracht; sobald aber mehrere Lastpunkte vorhanden sind, hauptsächlich aber wenn, wie bei grösseren Eisenbahnbrücken, die Axlasten in gegebenen Entfernungen einander folgen, combiniren sich deren Einwirkungen der Art, dass man einen grösseren oder kleineren Theil der Brücke als gleichmässig belastet annehmen darf, ohne einen merklichen Fehler zu begehen; eine nähere Untersuchung über die Grösse der zu substituirenden per Längeneinheit berechneten gleichförmigen Last wird an seinem Orte angestellt werden.

Diess vorausgesetzt, denken wir uns die Aenderung in der Belastung dadurch dargestellt, dass die per Längeneinheit berechnete Ueberlast k von einem Brückenende zum andern vorschreitet, so dass dieselbe schliesslich die ganze Brückenöffnung bedeckt. — In Folge dieser Annahme ist ein beliebiges Fragment der Brückenlänge, insoweit es ausser dem Eigengewicht noch eine Ueberlast zeigt, mit einem Gewichte von $p + k$ per Längeneinheit behaftet; diess ist zugleich die grösste per Längeneinheit anwachsende Total-

last $q = p + k$, welche auf die ganze Brückenlänge ausgedehnt, die grösste denkbare Belastung der Brücke darstellt. — Wir werden diese Art der Belastung im Allgemeinen den späteren Berechnungen zu Grunde legen und nur in einzelnen Fällen concentrirte Lasten in Anwendung zu bringen haben.

59. Die Annahme der gleichförmigen Vertheilung von Eigengewicht und ~~Neben~~last lässt eine Reihe wichtiger Eigenschaften der balkenförmigen Träger zur Anschauung kommen. — Die Weite einer Brückenöffnung A B sei mit l bezeichnet; ein Stück der

Fig. 52.



Brücke von der Länge λ sei mit $q = p + k$, der Rest blos mit dem Eigengewicht p belastet; da die Länge λ noch ganz willkürlich ist, so sind in diesem Falle alle möglichen Belastungen der Brücke inbegriffen. — Wir bestimmen zunächst die Auflagerdrücke A und B. Es ist nach dem Hebelgesetz, nach Gleichung 4) der Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{lp}{2} + \lambda k \frac{2l - \lambda}{2l} \\ B &= \frac{lp}{2} + \lambda k \frac{\lambda}{2l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 91)$$

Erinnern wir uns nun, dass für einen Querschnitt x bezeichnet:

$\mathfrak{V}$ die Summe der am Fragment thätigen äusseren Kräfte,

$\mathfrak{M}$ das Moment derselben äusseren Kräfte in Beziehung auf den fraglichen Querschnitt x,

so erhalten wir:

für das belastete zunächst A liegende Stück

$$\mathfrak{V} = A - (k + p)\, x \quad \ldots\ldots \quad 92)$$

$$\mathfrak{M} = Ax - (k + p) \frac{x^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad 93)$$

für das unbelastete zunächst B gelegene Stück

$$\mathfrak{V} = A - \lambda k - px \quad \ldots\ldots \quad 94)$$

$$\mathfrak{M} = Ax - \lambda k \left(x - \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{px^2}{2} \quad \ldots \quad 95)$$

Wenn man die einzelnen Vertikalkräfte $\mathfrak{V}$ und Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ für hinreichend viele Werthe x aus den Gleichungen 92)—95) berechnet, die so gewonnenen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ als Ordinaten der Abscissen x aufträgt, wenn man endlich die Endpunkte dieser Ordinaten durch eine stetige Linie verbindet, so erhält man 2 Kurven, welche für jeden denkbaren Werth von x die entsprechenden $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ durch Abgreifen mit dem Zirkel geben; die Fig. 54. stellt uns diese Kurven für eine bestimmte Länge der Ueberlast dar; die Kurve $\mathfrak{V}$ besteht aus geraden Linien, deren Neigung gegen die Abscissenaxe proportional den Belastungen q und p ist; — die Kurve $\mathfrak{M}$ setzt sich aus Parabelbögen zusammen, deren Axen vertikal stehen und deren Parameter denselben Belastungen q und p umgekehrt proportional sind. Diese Bemerkungen dienen uns, um die Kurven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ aufzutragen, wenn nur einige wenige Werthe nach den Gleichungen 92)—95) berechnet worden sind.

Die Gleichungen 92)—95) geben $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ nur für einen bestimmten Werth von λ; um alle möglichen Belastungen zu berücksichtigen, sind die Umhüllungslinien sämmtlicher Kurven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ zu bestimmen. — Es ist für jedes x dasjenige λ zu bestimmen, welches den grössten Werth von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ gibt. Um das Maximum von $\mathfrak{V}$ zu bestimmen, setzen wir in Gleichung 94) für A seinen Werth aus Gleichung 91) ein und erhalten:

$$\mathfrak{V} = \frac{lp}{2} - \frac{\lambda^2 k}{2l} - px$$

Für ein und dasselbe x hat dieser Ausdruck einen desto kleineren positiven oder grösseren negativen Werth, je grösser x ist, vorausgesetzt, dass λ nicht grösser ist als x. Würde nun λ über x hinaus zunehmen, so würde $\mathfrak{V}$ nicht mehr durch Gleichung 94), sondern durch Gleichung 92) bestimmt sein, und aus dieser letztern Gleichung folgt, dass solange $\lambda > x$ stets der positive Werth von $\mathfrak{V}$ im betrachteten Querschnitt grösser, der negative Werth aber kleiner ist, je grösser A, d. h. je grösser λ ist. — Wenn eine per Längeneinheit gleichförmig vertheilte Last k von A nach B vorrückt, so findet an jedem Punkte dann das positive Maximum oder das negative Minimum von $\mathfrak{V}$ statt, wenn $\lambda = x$; hiedurch geht Gleichung 94) in die Form über:

$$\max \mathfrak{V} = \frac{pl}{2} - \frac{kx^2}{2l} - px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 96)$$

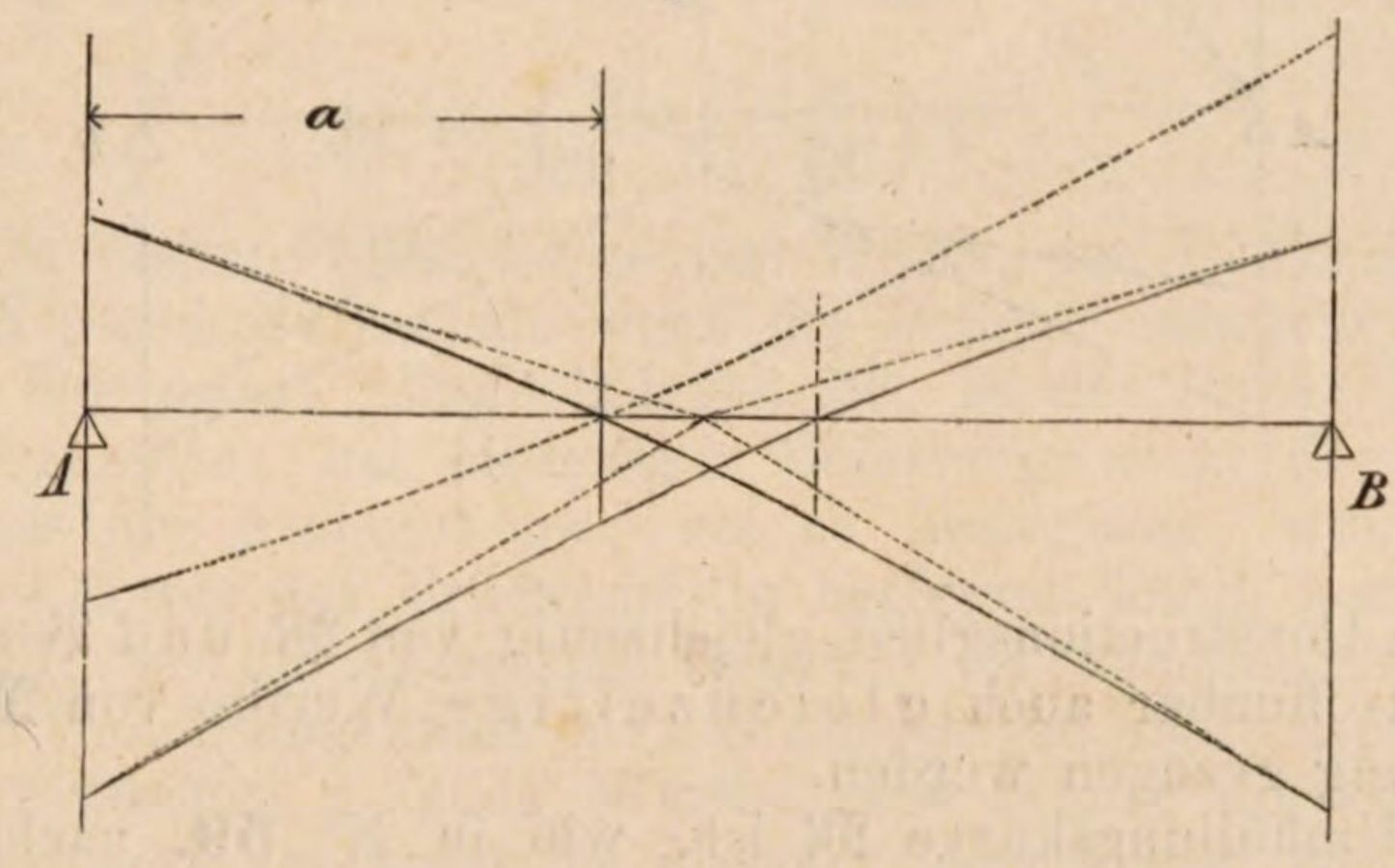
was die Umhüllungskurve für das Minimum oder Maximum von $\mathfrak{V}$ ist, wenn die Last von A nach B vorrückt; eine zweite symmetrische Kurve

$$\max \mathfrak{V} = \frac{pl}{2} - \frac{k\,(l-x)^2}{2l} - p\,(l-x) \quad . \quad . \quad 96^a)$$

ist ebenso die Umhüllungslinie sämmtlicher Maxima oder Minima von $\mathfrak{V}$, wenn die Last von B nach A sich bewegt. — In Fig. 53

sind diese beiden Kurven eingetragen; je der grössere dieser beiden Werthe gibt den absolut grössten Werth von $\mathfrak{V}$; derselbe ist durch Gleichung 96) gegeben, wenn $x > \frac{l}{2}$, durch Gleichung 96[a]), wenn $x < \frac{l}{2}$.

Fig. 53.



Wir bemerken in Fig. 53, dass die beiden Kurvenzweige, welche die absolut grössten Werthe von $\mathfrak{V}$ angeben, nahezu geradlinig sind; es wird also hinreichend sein, wenn ausser den grössten Werthen von A und B

$$A = B = (p + k)\frac{l}{2}$$

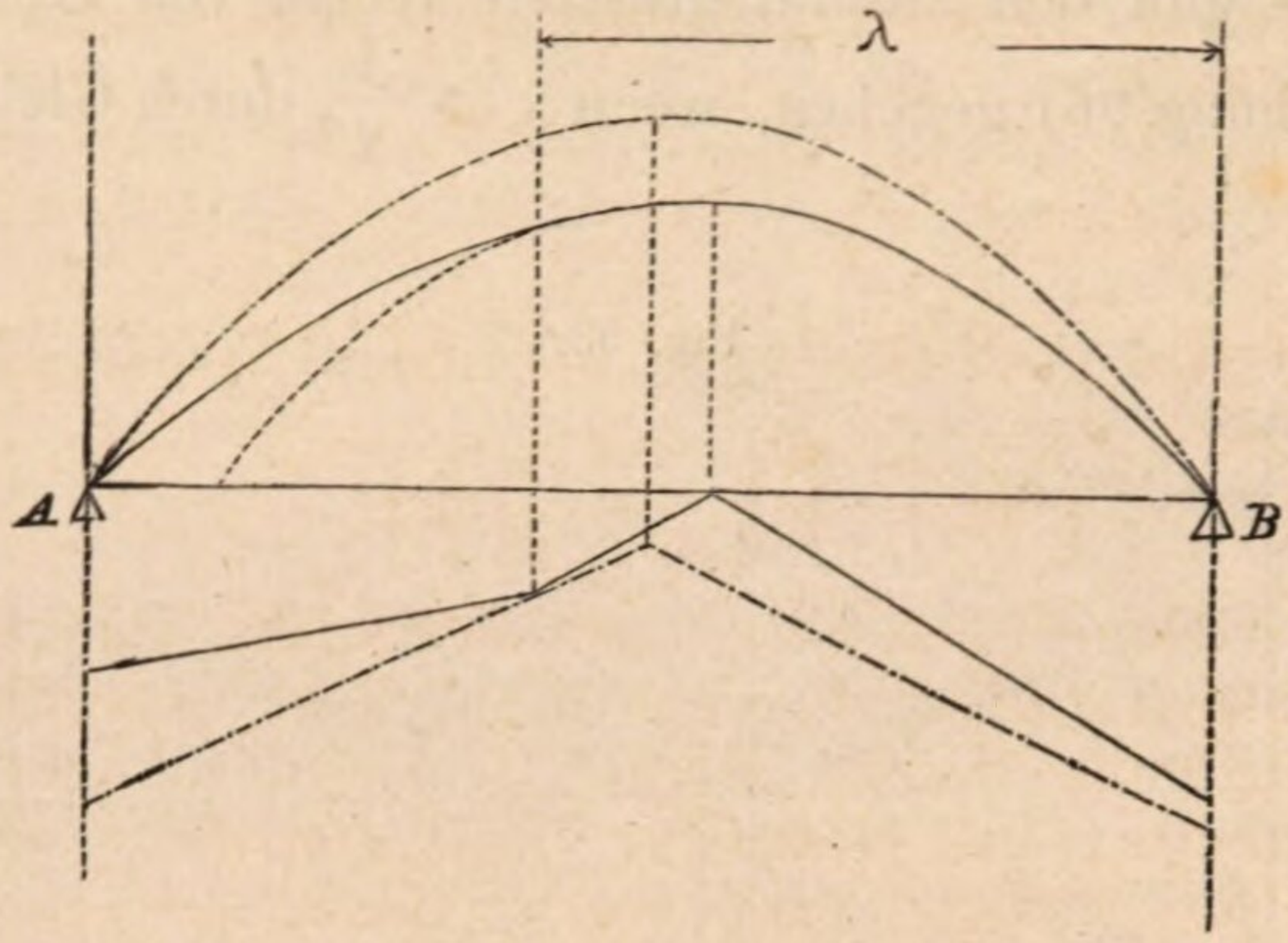
auch noch der Werth max $\mathfrak{V}$ für $x = \frac{l}{2}$ bekannt ist; dieser Werth findet sich aber aus Gleichung 96) und 96[a])

$$\max \mathfrak{V} = \frac{kl}{8}.$$

Die Umhüllungslinie sämmtlicher Kurven $\mathfrak{M}$ ist diejenige Parabel, welche der gleichförmig vertheilten Maximallast q entspricht. Denn wir ersehen aus Gleichung 91), dass A und B Maxima sind für $\lambda = l$; somit hat unter allen denkbaren Kurven $\mathfrak{M}$ die der Maximallast entsprechende Parabel gemäss Gleichung 17) die grössten trigonometrischen Tangenten an den Auflagern; eine andere aus verschiedenen Parabelbögen zusammengesetzte Kurve kann daher die genannte Umhüllungslinie nicht überschreiten. — In Fig. 54. sind für eine beliebige Länge λ die Kurven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ eingetragen und hieraus ersichtlich, wie solche ganz innerhalb der beschriebenen Umhüllungslinien sich befinden.

60. Die Maximalwerthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$, wie solche durch die vorbeschriebenen Umhüllungslinien für jeden Schnitt x erhalten werden, sind nur dann zur Bestimmung der Dimensionen genügend, wenn letztere blos durch $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{V}$ bestimmt sind; ist dagegen

Fig. 54.



irgend ein Constructionsglied gleichzeitig von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ abhängig, so müssen offenbar auch gleichzeitige Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ in Rechnung gezogen werden.

Die Umhüllungskurve $\mathfrak{M}$ ist, wie in N°. **59.** nachgewiesen, nichts Anderes als die Kurve der gleichförmig vertheilten Maximallast q; hiefür ist $A = \frac{ql}{2}$ und die einzelnen $\mathfrak{V}$ finden sich nun sehr leicht nach Gleichung 92), d. h. die Kurve $\mathfrak{V}$ besteht für die Maximallast aus Geraden, welche die Abscissenaxe in der Entfernung $x = \frac{l}{2}$ schneiden.

Die grössten Werthe der Vertikalkraft $\mathfrak{V}$ finden nach N°. **59.** für jeden Abstand x dann statt, wenn die Last bis zum Punkte x vorgerückt ist; da die Last von A oder B hereinrücken kann, so entstehen zwei Umhüllungslinien max $\mathfrak{V}$, und sind entsprechend auch zwei Kurven $\mathfrak{M}$ vorhanden, welche für jedes max $\mathfrak{V}$ das zugehörige gleichzeitige Angriffsmoment $\mathfrak{M}$ erkennen lassen.

Die Last gehe von A nach B, und sei bis zum Punkt x vorgerückt, so ist

$$\mathfrak{M} = Ax - (p + k)\frac{x^2}{2}$$

$$A = \frac{pl}{2} + kx\frac{2l - x}{2l}$$

woraus für die eine der beiden gesuchten Kurven folgt

$$\mathfrak{M} = \frac{pl}{2}x + \frac{k - p}{2}x^2 - \frac{k}{2l}x^3 \quad 97)$$

Diese Kurve erreicht ihr Maximum für

$$x = l\left\{\frac{k - p}{3k} \pm \sqrt{\frac{p}{3k} + \left(\frac{k - p}{3k}\right)^2}\right\} \quad . \quad . \quad 98)$$

Wenn die Last von B nach A rückt, so sind die der Umhüllungscurve max $\mathfrak{V}$ entsprechenden Angriffsmomente ausgedrückt durch die Gleichung

$$\mathfrak{M} = \frac{pl}{2}(l - x) + \left(\frac{k - p}{2}\right)(l - x)^2 - \frac{k}{2l}(l - x)^3 \quad . \quad 97^a)$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird nach Gleichung 97) und 97^a) gefunden

$$\mathfrak{M} = \left(\frac{p}{8} + \frac{k}{16}\right) l^2$$

61. In vielen Fällen ist es von Werth, den Punkt x zu kennen, wo $\mathfrak{V}$ gleich Null wird; wenn die Brücke entweder gar nicht oder auf ihre ganze Länge belastet ist, ist der Punkt $\mathfrak{V} = 0$ in der Brückenmitte; bei einseitiger Belastung rückt dieser Punkt gegen eines der Auflager vor; um zu bestimmen, wie viel sich hiebei $\mathfrak{V} = 0$ aus der Brückenmitte entfernen kann, benützen wir die Fig. 53, wo die äussersten Grenzen für sämmtliche $\mathfrak{V}$ durch die beiden Umhüllungslinien max $\mathfrak{V}$ angegeben sind; befinden sich für ein bestimmtes x beide Werthe max $\mathfrak{V}$ auf derselben Seite der Abscissenaxe, so kann für dieses x kein Werth von $\mathfrak{V}$ gleich Null werden; dieses kann vielmehr nur dann stattfinden, wenn die beiderlei Werthe von max $\mathfrak{V}$ zu verschiedenen Seiten der Abscissenaxe liegen, oder aber auch wenn einer derselben auf der Abscissenaxe selbst sich befindet; es geht hieraus hervor, dass diejenigen Punkte, wo die beiden Umhüllungslinien max $\mathfrak{V}$ die Abscissenaxe schneiden, zugleich die beiden äussersten Lagen des Punktes $\mathfrak{V} = 0$ sind; bezeichnen wir mit a die Abscisse eines dieser Schnittpunkte, so ist nach Gleichung 96) für $\mathfrak{V} = 0$

$$0 = \frac{pl}{2} - \frac{ka^2}{2l} - pa$$

woraus

$$a = \left\{ -\frac{p}{k} \pm \sqrt{\frac{p}{k} + \left(\frac{p}{k}\right)^2} \right\} l \quad 99)$$

Anmerk. Hr. Schwedler findet dieselbe Relation auf einem etwas verschiedenen Wege (Berliner Zeitschrift für Bauwesen 1851); er stellt die Last dar, wie sie von A immer näher gegen die Brücke rückt und da durch den Punkt $\mathfrak{V} = 0$ immer mehr aus der Mitte gegen sich anzieht; diess geht so lange fort, bis die Last bis zum Punkt $\mathfrak{V} = 0$ vorgeschritten ist; würde nun die Last noch weiter vorrücken, so müsste $\mathfrak{V} = 0$ wiederum zurückweichen und so kommt man zu der Ueberzeugung, dass $\mathfrak{V} = 0$ dann am meisten aus der Mitte gerückt ist, wenn die zunächst A liegende Brückenseite bis zum Punkte $\mathfrak{V} = 0$ mit $p + k$, die andere Seite nur mit dem Eigengewicht p belastet ist. Hiedurch erhält man die beiden Gleichungen

$$A = a(p + k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

$$A = k\frac{2l - a}{2l} + \frac{pl}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

woraus derselbe Werth für a folgt, den wir bereits in Gleichung 99) gegeben haben.

62. Wir zeigen die Resultate der Formeln 91)—99) in einer graphischen Darstellung Tafel II. (am Schlusse des Buches), indem wir 6 verschiedene Verhältnisse $\frac{p}{k} = \frac{\text{Eigengewicht}}{\text{zufällige Last}}$ zu Grunde legen. — In dieser graphischen Darstellung sind die Umhüllungslinien max $\mathfrak{M}$ und max $\mathfrak{V}$, sowie die zugehörigen Werthe $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ enthalten.

Die Umhüllungslinie max $\mathfrak{M}$ und die gleichzeitigen Werthe von $\mathfrak{V}$ finden sich nach den Gleichungen 92) und 93); diese Kurven sind für alle Verhältnisse $\frac{p}{k}$ dieselben; die Kurve max $\mathfrak{M}$ ist eine Parabel, deren Scheitel-Ordinate stets $= 0{,}125\ ql^2$; die zugehörige Kurve $\mathfrak{V}$ besteht aus 2 Geraden, welche in der Mitte der Abscissenaxe sich schneiden und deren Ordinaten an den Endauflagern bestimmt sind durch die Werthe $A = B = 0{,}5\ ql$.

Die Umhüllungslinien max $\mathfrak{V}$ sind bestimmt durch Gleichung 96), beziehungsweise 96[a]); die gleichzeitigen Werthe von $\mathfrak{M}$ finden sich nach Gleichung 97) und 97[a]); der Punkt, wo letztere Kurven ihr Maximum erreichen, ist durch Gleichung 98) gegeben.

Die Kurve max $\mathfrak{M}$ und die gleichzeitige Kurve $\mathfrak{V}$ kann aus den bekannten Eigenschaften der Parabel und der geraden Linie nach vorstehenden Andeutungen ohne Weiteres aufgezeichnet werden; die Kurve max $\mathfrak{V}$ und die der gleichzeitigen $\mathfrak{M}$ erfordern für die verschiedenen Verhältnisse $\frac{p}{k}$ eine wiederholte Anwendung der Gleichungen 97) — 99), deren Resultate für die fragliche Tafel II. in nachfolgender Tabelle XV. enthalten sind.

In den graphischen Darstellungen der Tafel II. sind die absolut grössten Werthe max $\mathfrak{M}$ und max $\mathfrak{V}$ sammt ihren gleichzeitigen Werthen $\mathfrak{V}$, beziehungsweise $\mathfrak{M}$ eingetragen; jedes einzelne Constructionsglied wird entweder für max $\mathfrak{M}$ oder für max $\mathfrak{V}$ eine grössere Krafteinwirkung erleiden; es wäre zwar denkbar, dass 2 andere gleichzeitige, aber sonst beliebige Werthe $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ das fragliche Constructionsglied mehr in Anspruch nehmen; es lässt sich jedoch in jedem speziellen Falle nachweisen (siehe Anmerk.), dass diess nicht der Fall ist, und dass somit die gleichförmig vertheilte Maximallast (Kurve max $\mathfrak{M}$) oder die bis zum betrachteten Punkte ausgedehnte einseitige Belastung (max $\mathfrak{V}$) zur Bestimmung der Dimensionen durchaus genügen; in welcher Weise aus zwei gegebenen gleichzeitigen Werthen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ die in irgend einem Constructionsglied wirkende Kraft gefunden wird, wird in den späteren Abschnitten dargelegt werden und dienen hiezu insbesondere die mehrfach erwähnten praktischen Formeln, in welchen stets die Grössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ wieder erscheinen werden.

Anmerk. Für Fachwerkbrücken mit parabolisch gekrümmten Längsbändern hat Hr. Culmann diesen Satz bewiesen (Förster'sche Bauzeitung 1853).

Tabelle XV.

Abscissen.		¼ l	$\mathfrak{B} = 0$	½ l		Max $\mathfrak{M}$		¾ l
$\frac{p}{q}$	$\frac{p}{k}$	$\mathfrak{M}$ n. Gl. 97)	Absc. x n. Gl. 99)	$\mathfrak{B} = \frac{kl}{8}$	$\mathfrak{M} = \left(\frac{p}{8} + \frac{k}{16}\right) l^2$	Abs. x n. Gl. 98)	$\mathfrak{M}$ Gl. 97)	$\mathfrak{M}$ Gl. 97)
1	∞	$0{,}0950\ ql^2$	$0{,}500\ l$	0	$0{,}125\ ql^2$	$0{,}500\ l$	$0{,}1250\ ql^2$	$0{,}0950\ ql^2$
¾	3	$0{,}0761\ ql^2$	$0{,}465\ l$	$0{,}0312\ ql$	$0{,}1094\ ql^2$	$0{,}535\ l$	$0{,}1099\ ql^2$	$0{,}0880\ ql^2$
⅔	2	0,0703	0,450	0,0416	1,1041	0,550	0,1052	0,0859
½	1	0,0586	0,414	0,0625	0,0937	0,572	0,0962	0,0820
⅓	½	0,0469	0,365	0,0830	0,0833	0,608	0,0870	0,0780
⅕	¼	0,0375	0,302	0,1000	0,0750	0,632	0,0820	0,0750
⅑	⅛	0,0312	0,250	0,1110	0,0694	0,647	0,0784	0,0729

Die Anwendung der graphischen Darstellung Tafel II. geschieht am einfachsten dadurch, dass man die Grössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ mit dem Zirkel absticht; genauere Resultate erhält man, wenn man dieselben Figuren mit Hülfe der Tabelle XV., beziehungsweise der Gleichungen 97)—99), in einem grösseren Maasstabe aufträgt, wobei die Figuren der Tafel II. gleichsam als Vorlegeblätter dienen. — Endlich aber haben diese graphischen Darstellungen den Zweck, das Verständniss der vorstehenden und der folgenden Entwicklungen zu erleichtern und die Resultate der Formeln und der Rechnungen zur Anschauung zu bringen.

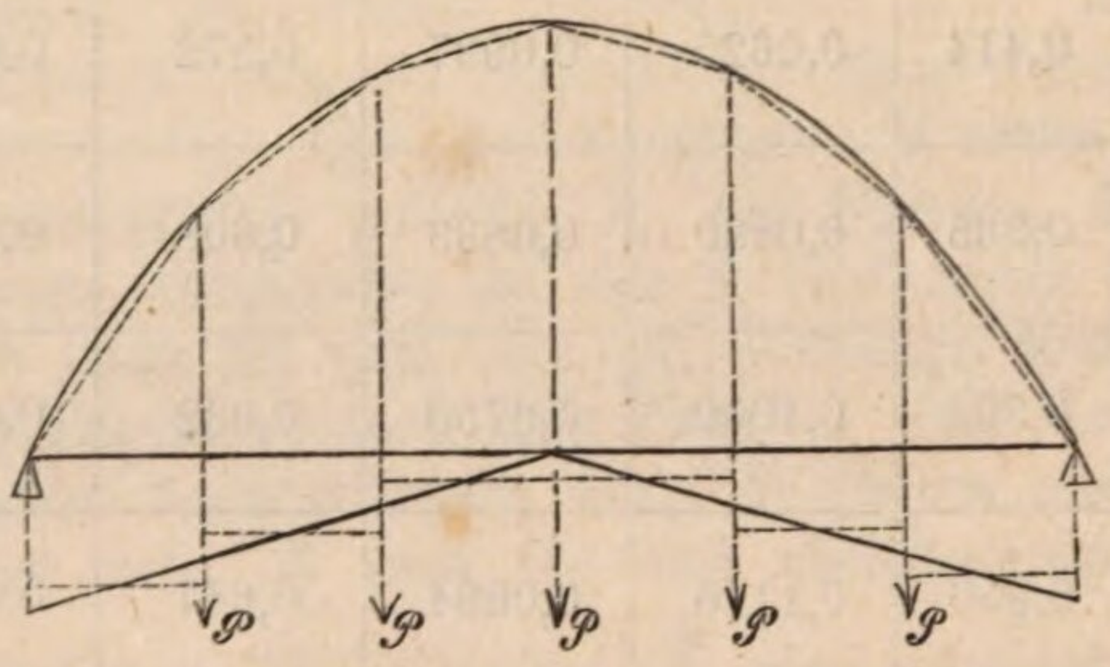
63. Es soll nun untersucht werden, inwieweit bei Eisenbahnbrücken die Annahme der gleichmässigen Vertheilung der Ueberlast begründet ist und welche Last per Längeneinheit durch die Eisenbahnfahrzeuge auf die Brücke ausgeübt wird.

Das Gewicht eines Eisenbahntrains ist auf einzelne Punkte, die Radaxen, vertheilt und müssen wir uns vor Allem klar machen, wie an einzelnen Punkten wirkende Gewichte auf die Zusammensetzung der einzelnen Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ und Vertikalkraft $\mathfrak{B}$ einwirken.

Wenn wir einen vorläufig als schwerlos gedachten Träger mit

einzelnen an bestimmten Punkten angreifenden Gewichten belastet denken, so ist die Vertikalkraft zwischen den einzelnen Lastpunkten constant, was aus Gleichung 16) zunächst für ΣY und eben damit auch für $\mathfrak{V}$ folgt; wenn so die Kurve $\mathfrak{V}$ aus einzelnen horizontalen Geraden zusammengesetzt ist, so folgt nach Gleichung 18), dass die Kurve $\mathfrak{M}$ ein Polygon ist, dessen Endpunkte durch die einzelnen Lastpunkte gegeben sind. — Wenn die einzelnen concentrirten Lasten P gleich gross und gleichmässig auf die Länge der Brücke vertheilt sind, so muss das Polygon $\mathfrak{M}$ für jede Polygonseite d wenigstens einen Punkt mit einer Parabel gemein haben, welch letztere derselben stetig und gleichmässig vertheilten Belastung $\frac{P}{d}$ entsprechen würde (siehe Fig. 55.) — Je mehr Knotenpunkte das

Fig. 55.



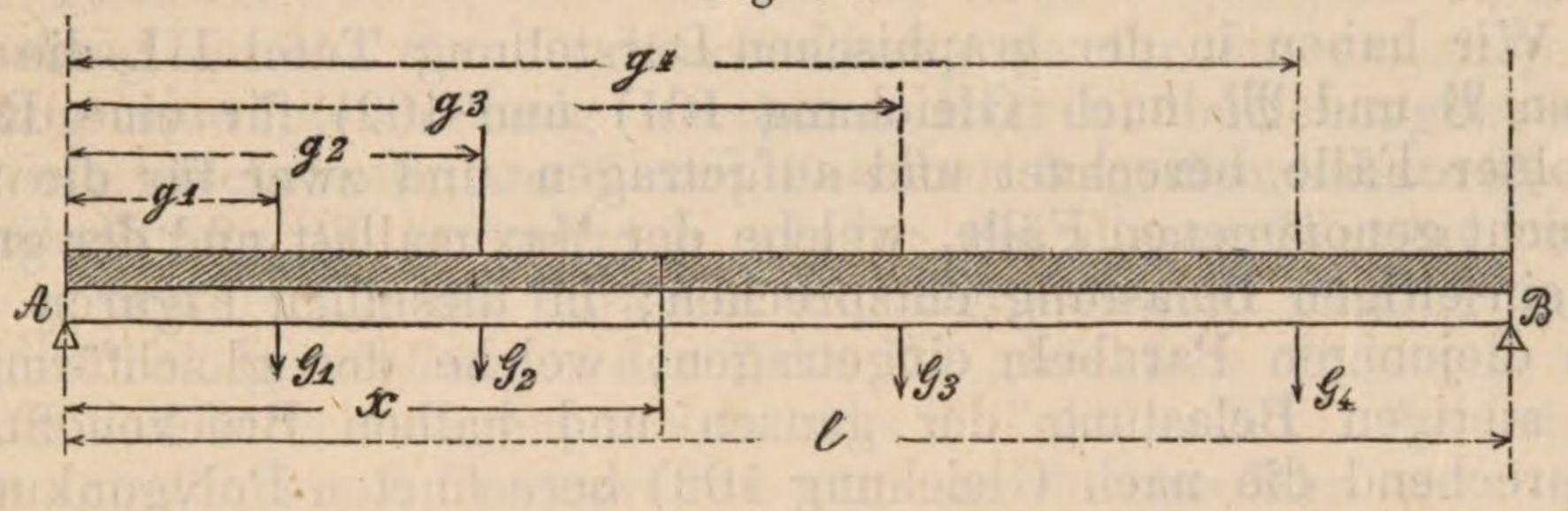
Polygon zeigt, d. h. je näher die Angriffspunkte der Lasten beisammen liegen, desto mehr wird sich das Polygon der genannten Parabel anschliessen. — Diese Verhältnisse bleiben dieselben, wenn das gleichförmig vertheilte Eigengewicht mit in Rechnung gezogen wird, indem die betreffenden Momente sowohl bei dem Polygon als bei der Parabel einfach addirt werden, und gehen hiedurch die Polygonseiten in schwach gekrümmte Parabelbögen über.

Die dem Polygon entsprechende Kurve $\mathfrak{V}$ besteht, wie schon bemerkt, aus einzelnen horizontalen Geraden (siehe Fig. 55); bei gleichförmiger Vertheilung der Lasten und Lastpunkte ist die Umhüllungslinie der treppenförmigen Kurve $\mathfrak{V}$ eine Gerade, und entspricht deren Neigung der gleichmässig und stetig vertheilten Totallast; auch hier werden bei vermehrter Zahl der Lastpunkte die staffelförmigen Absätze abnehmen und den umhüllenden Geraden sich nähern; durch Berücksichtigung des Eigengewichts erhalten die einzelnen Staffeln eine Neigung gegen die Abscissenaxe, deren trigonometrische Tangente dem Eigengewicht des Trägers proportional ist.

Wenn die einzelnen Lasten beliebig gross und beliebig vertheilt sind, so werden auch die Umhüllungslinien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ beliebige Gestalt annehmen; man kann aber bei Eisenbahnbrücken stets eine solche Aufstellung des Trains annehmen, wie sie der Maximalbe-

lastung und der grössten einseitigen Belastung möglichst entsprechend ist, und diese beiden Belastungsarten werden nach N°. **62.** der grössten Anstrengung der einzelnen Brückentheile entsprechen. Zur nähern Nachweisung muss vor Allem der Einfluss concentrirter Lasten in bestimmte Formeln gebracht werden.

Fig. 56.



Eine Brückenöffnung AB sei ausser dem gleichförmig vertheilten Gewicht p noch mit einer Reihe concentrirter Lasten G_1 G_2 G_3 G_4 in den Abständen g_1 g_2 g_3 g_4 behaftet; es müssen auch hier wiederum zunächst die Auflagerdrücke A und B bestimmt werden; die Weite der Brückenöffnung sei mit l bezeichnet, so finden wir durch wiederholte Anwendung des Hebelgesetzes (Gleichung 4)

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{pl}{2} + \frac{(l-g_1)G_1 + (l-g_2)G_2 + (l-g_3)G_3 + (l-g_4)G_4}{l} \\ B &= \frac{pl}{2} + \frac{g_1G_1 + g_2G_2 + g_3G_3 + g_4G_4}{l} \end{aligned}\right\} 100)$$

für einen beliebigen Schnitt x bestimmen sich $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ mit entsprechender Berücksichtigung der Fig. 56. wie folgt:

$$\mathfrak{V} = A - px - G_1 - G_2 \ldots\ldots \quad 101)$$

$$\mathfrak{M} = Ax - \frac{px^2}{2} - G_1 (x - g_1) - G_2 (x - g_2) \ldots\ldots \quad 102)$$

64. Gehen wir nun auf das bestimmte Beispiel eines Eisenbahntrains über, so ist zunächst die Distanz und Belastung der einzelnen Axen passend zu wählen, und zwar letztere reichlich stark, da die Eisenbahnfahrzeuge im Verkehr häufigen Veränderungen und insbesondere Gewichtsvermehrungen unterworfen sind. — Wir nehmen 3 Locomotiven nebst Tender hinter einander an; der Rest der Brückenlänge kann dann mit einzelnen vollbeladenen Güterwägen bedeckt sein. — Die einzelnen Maasse und Gewichte sind in der graphischen Darstellung Tafel III. verzeichnet; die 3 Locomotivaxen haben je 2 M. Distanz und 12 tons Belastung; die Tender je 1,5 M. Axendistanz und je 6 tons Axenbelastung; die hintere Locomotivaxe und die vordere Tenderaxe sind 3 M. von einander entfernt; die Puffer ragen 2 M. über die vordern Locomotivaxen und 1,5 M. über die hintern Tenderaxen vor, so dass die ganze Länge für Locomotive sammt Tender 13,5 M. beträgt, was bei

einem Gesammtgewicht von 54 tons eine Belastung von 4000 Kilo per laufenden Meter Geleise gibt; eine Belastung, welche z. B. in Frankreich allgemein in Rechnung genommen wird.

Die Güterwagen werden zu 6 M. Länge von Puffer zu Puffer angenommen; ihre Axen sind je 3 M. entfernt und je mit 9 tons belastet; diese Wagen haben also per laufenden Meter 3000 Kilo Gewicht.

Wir haben in der graphischen Darstellung Tafel III. die einzelnen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ nach Gleichung 101) und 102) für eine Reihe einzelner Fälle berechnet und aufgetragen und zwar für die 2 in Aussicht genommenen Fälle, welche der Maximallast und der grössten einseitigen Belastung entsprechen; in dieselben Figuren sind auch diejenigen Parabeln eingetragen, welche der gleichförmigen und stetigen Belastung der ganzen und halben Brückenöffnung entsprechend die nach Gleichung 102) berechneten Polygonkurven zu ersetzen haben; dessgleichen die zugehörigen Geraden $\mathfrak{V}$. — Beispielsweise ist in der folgenden Tabelle XVI. für die Spannweite von 15 Metern das durch die Gleichungen 100) bis 102) gewonnene Rechnungsresultat zusammengestellt.

Tabelle XVI.

Spannweite 15 Meter. Eigengewicht 1075 K. p. M.

Abscissen in Metern:		0	0,5	1,0	2,5	3,5	5,5	5,95	7,5	9,5	11,5	12,5	13,5	15,0
I. Belastung durch das Eigengewicht.	$\mathfrak{V}$	8,05							0					8,05
	$\mathfrak{M}$	0			16,8	21,6	28,0		30,2	28,0	21,6	16,8		0
II. Eine Locomotive mit ihrem Mittelrad in der Mitte, an die Vorderseite einer 2. Locomotive gekuppelt.	$\mathfrak{V}$	37,9		36,8	29,2		20,0		5,85	8,3			24,6	38,2
				30,8	23,2		8,0		6,15	20,3			36,6	
	$\mathfrak{M}$	0		37,4	82,4		147,1		161,0	148,7			55,7	0
III. Eine Locomotive mit ihrem Vorderrad bis zur Brückenmitte vorgerückt.	$\mathfrak{V}$	36,65	36,1			26,9	12,75		1,4					21,45
			30,1			14,9	0,75		13,4					
	$\mathfrak{M}$	0	18,0			103,6	131,2		130,6	101,4	68,3			0
IV. Gleichförmig vertheilte Maximallast von 5730 Kilo per Meter.	$\mathfrak{V}$	43,0							0					43,0
	$\mathfrak{M}$	0		40,0	90,0		149,5		161,0	149,5		90,0	57,9	0
V. Die Brücke einerseits mit 7235 K. p. M., anderseits mit dem Eigengewicht belastet.	$\mathfrak{V}$	42,7						0	11,55					19,6
	$\mathfrak{M}$	0				95,4		128,0	117,0		62,2			0

In dieser Tabelle ist $\mathfrak{B}$ in tons à 1000 Kilo, $\mathfrak{M}$ in tons und Metern ausgedrückt.

Aehnliche Tabellen haben wir für die Spannweite von 7, 10, 15, 20, 30, 40, 60 und 100 Meter berechnet. Das Resultat der fünf ersteren ist in den graphischen Darstellungen Tafel III. gegeben.

65. Eine nähere Untersuchung dieser graphischen Darstellungen (Tafel III.) zeigt, dass bei der zu Grunde gelegten Verkehrsbelastung sowohl für die Maximallast, als für die einseitige Belastung eine gleichförmig vertheilte Last q, beziehungsweise q' existirt, welche sehr annähernd dieselben Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ oder Vertikalkräfte $\mathfrak{B}$ hervorrufen würde; die diesen Werthen von q und q' entsprechenden Parabeln und Geraden sind nämlich in den graphischen Darstellungen der Tafel III. gleichfalls eingetragen, auf Grund der Berechnungen, welche wie in Tabelle XVI. für jede der oben angeführten 8 Spannweiten von uns durchgeführt worden ist. Die Resultate dieser Berechnungen sind in folgender Tabelle XVII. zusammengestellt.

Tabelle XVII.

Spannweite		7 M.	10 M.	15 M.	20 M.	30 M.	40 M.	60 M.	100 M.
Eigengewicht der Brücke per Meter = p		800 K.	900 K.	1075 K.	1250 K.	1600 K.	1950 K.	2650 K.	4050 K.
Maximalbelastung der ganzen Brücke	gleichförmig vertheilte variable Last = k	5600	5440	4655	4440	4240	4050	3950	3700
	gleichförmig vertheilte Maximallast q = p + k	6400	6340	5730	5690	5840	6000	6600	7750
	Verhältniss: $\frac{p}{q}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5,3}$	$\frac{1}{4,5}$	$\frac{1}{3,6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2,5}$	$\frac{1}{1,9}$
Maximalbelastung der einen Brückenhälfte	gleichförmig vertheilte variable Last = k'	9200	7200	6160	5600	5200	5050	4650	3900
	gleichförmig vertheilte Maximallast q' = p + k'	10000	8100	7235	6850	6800	7000	7300	7950
	Verhältniss: $\frac{p}{q'}$	$\frac{1}{12,5}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6,7}$	$\frac{1}{5,5}$	$\frac{1}{4,25}$	$\frac{1}{3,6}$	$\frac{1}{2,75}$	$\frac{1}{2}$

Die in vorstehender Tabelle enthaltenen Eigengewichte entsprechen den durchschnittlichen Gewichten eiserner Brücken,

wie dieselben bei Anwendung unserer Regeln sich berechnen, und sind in Uebereinstimmung mit einer grossen Anzahl von bestehenden neuen Eisenbahnbrücken; die älteren Construktionen sind allerdings meist schwerer, zum Theil in sehr erheblichem Maasse. — Die von uns angenommene Verkehrsbelastung ist, wie schon bemerkt, sehr ansehnlich; wir halten diess im Allgemeinen für geboten, weil die Verkehrsverhältnisse in kurzen Zeiträumen zunehmen und die Anwendung stärkerer Locomotiven und Wagen nothwendig machen können.

66. Die Tabelle XVII. kann mit einigen Rectificationen zu genaueren Berechnungen Anwendung finden. Was zunächst die Verkehrsbelastung k betrifft, so werden beim Entwerfen neuer Brücken nur in besonderen Fällen geringere oder grössere Belastungen, als in Tabelle XVII. enthalten ist, anzuwenden sein, wie am Schlusse der vorhergehenden Nummer erläutert wurde; wenn es sich aber darum handelt, die durch irgend eine Belastung hervorgerufenen Spannungen der einzelnen Constructionsglieder zu ermitteln, so muss diese wirkliche Belastung der Berechnung zu Grunde gelegt werden können. — Für kleine Spannweiten ist dann allerdings die grösste Axenbelastung von überwiegendem Einfluss, und wird am Besten die Rechnung nach Gleichung 100) — 102) für den einzelnen Fall angestellt; sobald aber die Spannweiten grösser werden, ist das auf die Brücke gelegte Totalgewicht maassgebend; in Tabelle XVII. ist angenommen, dass Locomotive sammt Tender per laufenden Meter 4000 Kilo wiegen; wenn nun die in Wirklichkeit angewendete Verkehrsbelastung nur 3000 Kilo per Meter beträgt, so ist von den in der Tabelle aufgeführten Werthen von k und k' je nur $^3/_4$ zu nehmen.

Ganz gleich ist in allen Fällen besonderer Belastung zu verfahren, insbesondere auch dann, wenn für Gebirgsbahnen stärkere Locomotiven mit grösserer Axenbelastung angewendet werden.

Bezüglich des Eigengewichts der Brücken finden wir bei näherer Betrachtung, dass die in Tabelle XVII angenommenen Gewichte p der Relation entsprechen

$$p = 35\,l + 550 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 103)$$

wo p in Kilogrammen, die Spannweite l in Metern ausgedrückt ist. — Es ist klar, dass die Coefficienten 35 und 550 nur Mittelwerthe sind, und dass der jeweilige genaue Werth von der Construktionsart abhängig sein muss; es ist aber durch Vergleichung vieler Brückenconstructionen constatirt, dass diese Coefficienten für ein und dieselbe Constructionsweise constante Werthe haben; bezeichnen wir für eine bestimmte Anordnung diese Coefficienten mit C beziehungsweise F, so ist somit allgemein

$$p = Cl + F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 103^a)$$

Der Coefficient F darf als das auf die Längeneinheit reducirte Gewicht der Fahrbahn (sammt Querträgern etc.) angesehen

werden, so dass C l das auf die Längeneinheit reducirte Gewicht der Hauptträger bezeichnet; es ist hienach sehr einfach für jede beliebige Anordnung die Werthe C und F zu berechnen. — Für einige neuere Brücken sind nachstehend die Eigengewichte in dieser Weise dargestellt, indem das Gewicht in Kilo auf den laufenden Meter reducirt und die Spannweite l gleichfalls in Metern ausgedrückt ist:

Blechwandbrücken.

Brücke von 12 M. auf der oberschlesischen Bahn	$p = 38\,l + 500$
Brücke von Langon von 67 M. mittlerer Spannweite, auf 1 Geleise reducirt . .	$p = 23\,l + 410$

Gitter- und Fachwerkbrücken.

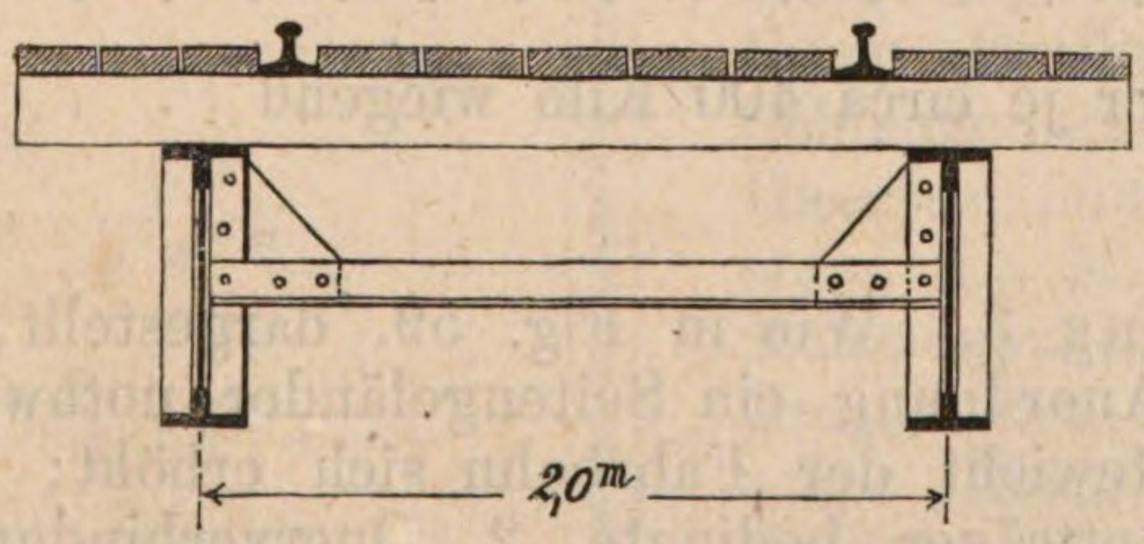
Gitterbrücke der oberschlesischen Bahn von 23 M. Spannweite	$p = 38\,l + 575$
Flakenseebrücke 26,8 M. Spannweite . .	$p = 45\,l + 894$
Brücke bei Drogheda, 54 M. mittlere Spannweite auf 1 Geleise reducirt	$p = 33\,l + 300$

Brücken mit parabolischen Trägern.

System von Pauli	$p = 28\,l + 450$
Brahebrücke von W. Schwedler, Spannweite 25,4 M.	$p = 28\,l + 666$

Wir werden in der Folge für jede einzelne Anordnung je am Schlusse des betreffenden Abschnitts die Coefficienten C auf Grund specieller Berechnung zusammenstellen. — Die Coefficienten F der Gleichung 103[a]), d. h. die Gewichte der Fahrbahn sind nachstehend für die einzelnen Grundtypen gegeben, indem eine möglichst gleichartige Detailanordnung angenommen wurde.

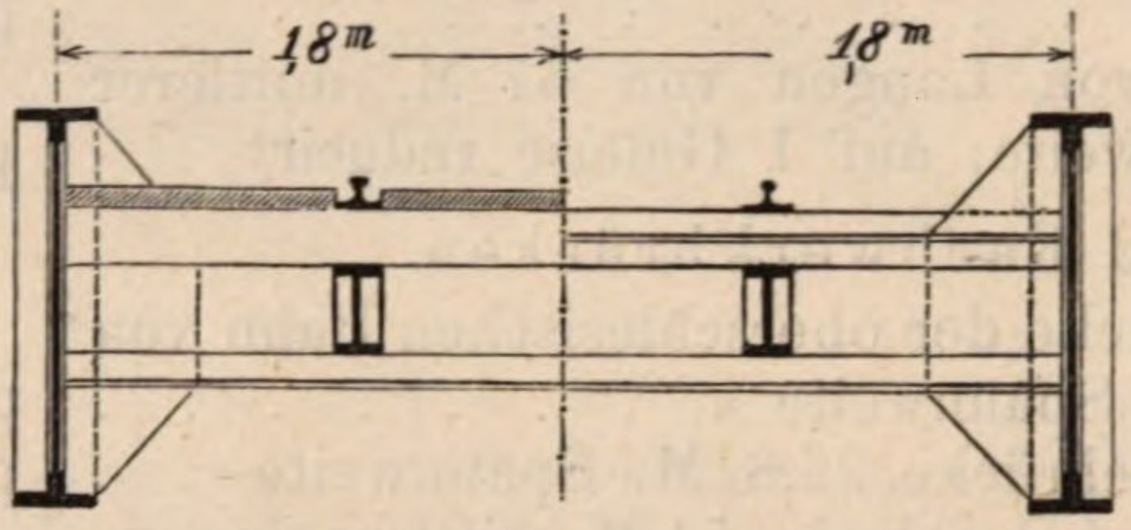
Fig. 57.



Anordnung 1. Wie in beistehender Fig. 57 skizzirt ist, ruhen die beiden Schienenstränge mittelst gewöhnlichen Querschwellen auf den Hauptträgern unmittelbar auf; die Entfernung der Querschwellen betrage 0,9 M. — Das Gewicht der Fahrbahn (ohne die Horizontalverbindungen) beträgt per laufenden Meter:

2 Fahrschienen per laufenden Meter, incl. Befestigungsmitteln je 40 Kilo wiegend	80 Kilo
$\frac{1,0}{0,9}$ Querschwellen je 2,5 M. lang $^{24}/_{15}$ C. stark per Stück 67,5 Kilo wiegend	75 „
2,2 Quadratmeter eichene Bedielung von 5 C. Dicke	83 „
Hiezu für Platten, Schrauben etc.	12 „
	250 Kilo

Fig. 58.



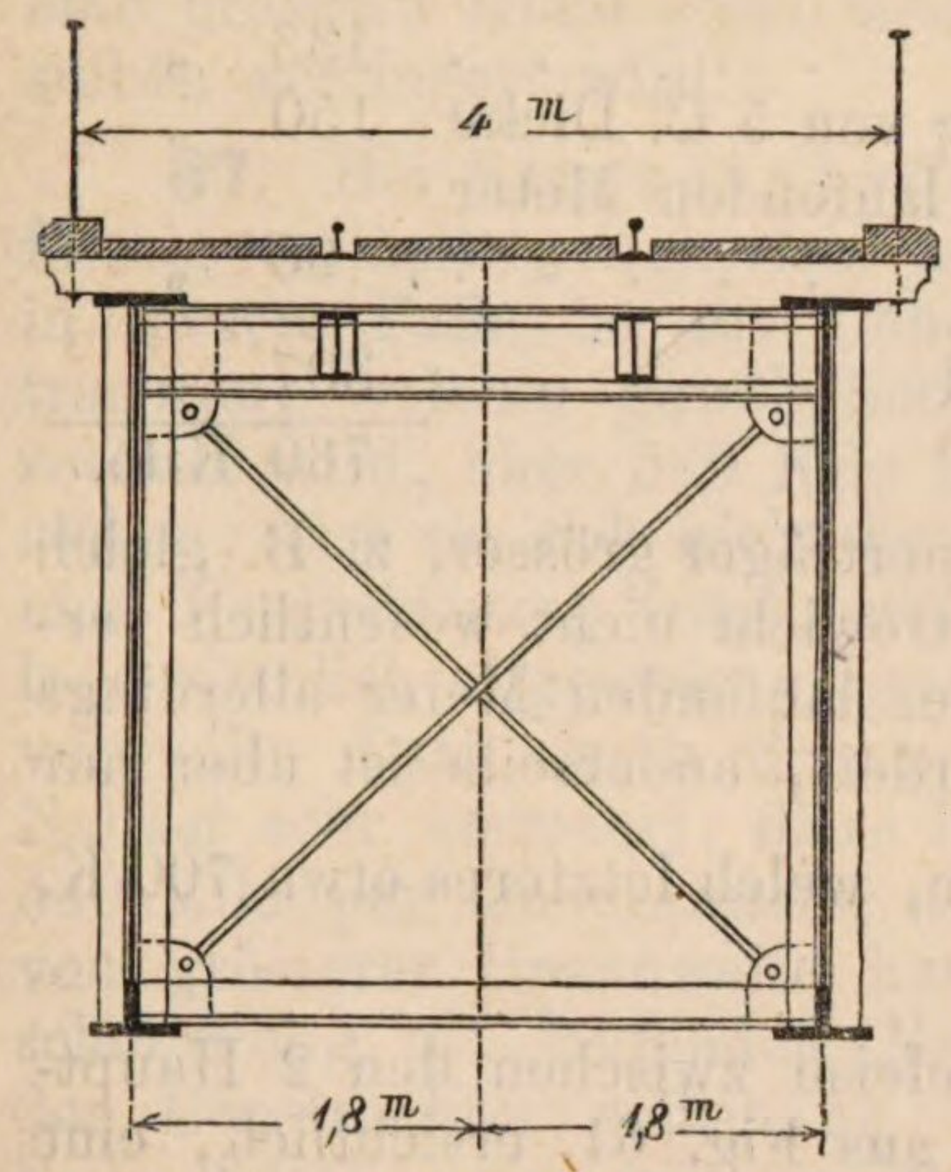
Anordnung 2. Die in Fig. 58 dargestellte Anordnung ist immer möglich, wenn die Schienenoberkante nicht mehr als 0,75 M. unterhalb der Oberkante der Hauptträger liegt; die Schienen ruhen mittelst Querschwellen auf besondern Zwischenträgern, sog. Schwellenträgern auf, letztere auf Querträgern, welche in Entfernungen von 1,8 M. gedacht sind; die Fahrbahn (ohne Diagonalverbindungen) wiegt per laufenden Meter:

2 Fahrschienen à 40 Kilo	80 Kilo
$\frac{1,0}{0,9}$ Querschwellen je 3,3 M. lang $^{24}/_{15}$ C. stark, je 89 Kilo wiegend	99 „
3,0 Quadratmeter eichene Bedielung von 5 C. Dicke	112 „
2 Schwellenträger je 45 Kilo per laufenden Meter wiegend	90 „
$\frac{1,0}{1,8}$ Querträger je circa 400 Kilo wiegend . . .	219 „
	600 Kilo

Anordnung 3. Wie in Fig. 59. dargestellt, so kann bei sonst gleicher Anordnung ein Seitengeländer nothwendig werden, wodurch das Gewicht der Fahrbahn sich erhöht; die durch die Höhe der Hauptträger bedingte 2. Querverbindung bleibt bei der folgenden Gewichtberechnung ausser Betracht, da diese Constructionstheile von der Trägerhöhe abhängig und somit veränderlich sind.

Indem im Uebrigen die Entfernung der Querträger mit 1,8 M. beibehalten wird, berechnet sich das Gewicht der Fahrbahn per laufenden Meter:

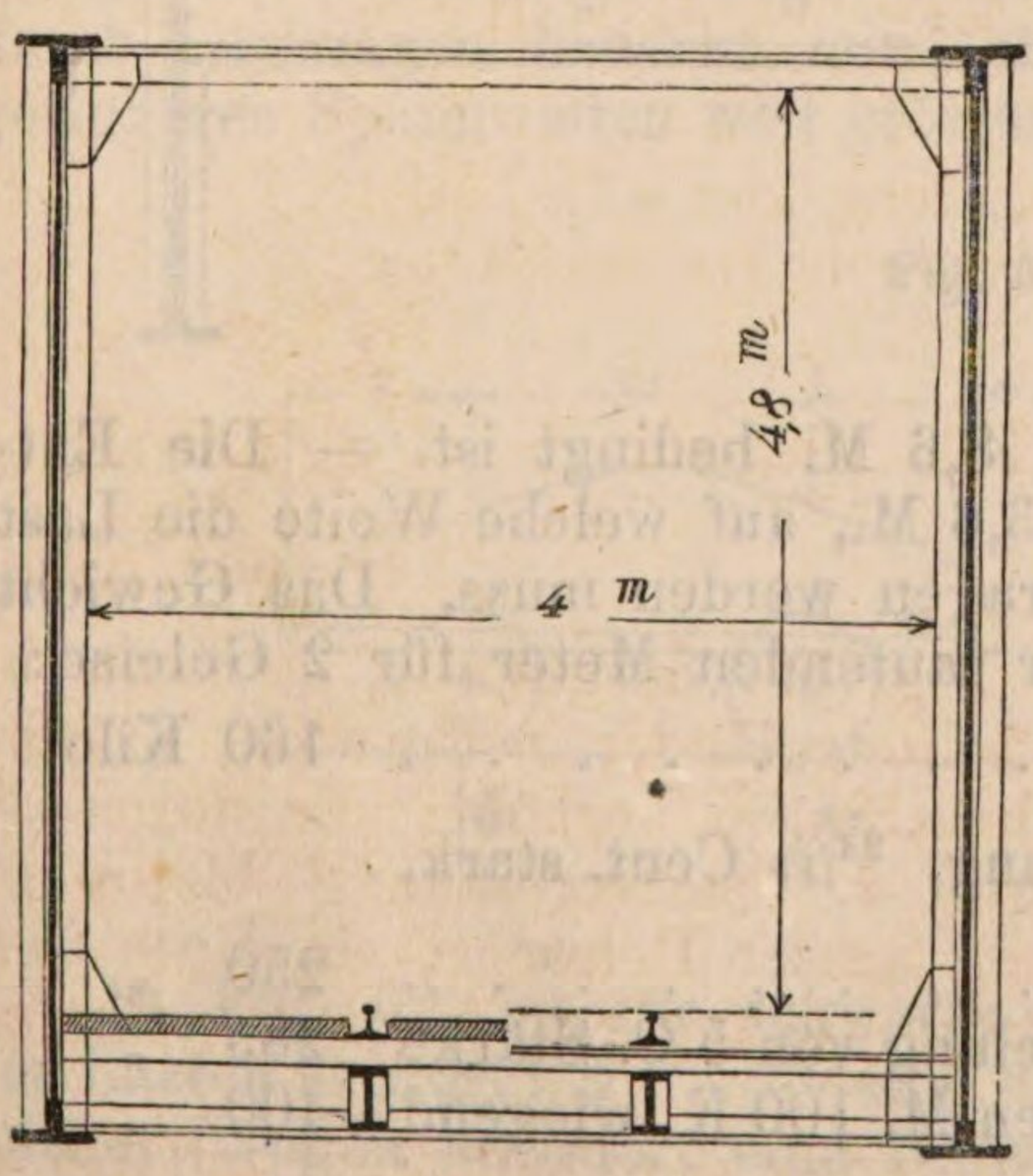
Fig. 59.



2 Fahrschienen à 40 Kilo 80 Kilo
$\frac{1,0}{0,9}$ Querschwellen, je 4,5 M. lang, $^{24}/_{15}$ C. stark, je 120 Kilo wiegend . . . . . 133 „
4,0 Quadratmeter eichene Bedielung von 5 Cent. Dicke . . . . . 150 „
2 Schwellenträger je 45 Kilo per laufenden Meter wiegend . . . . 90 „
$\frac{1,0}{1,8}$ Querträger à Cent. 400 K. . . . . 220 „
Das Geländer mag per laufenden Meter je 35 Kilo, somit beiderseitig zusammen wiegen . 70 „
740 Kilo.

Anordnung 4. Wenn die Schienenoberkante mehr als 1,2 M. unterhalb der Trägeroberkante liegt, so muss die lichte Weite zwischen den Hauptträgern 4,0 M. betragen; in Fig. 60. ist ein Fall dargestellt, wo die Fahrbahn möglichst tief gelegt ist und wegen der grossen Trägerhöhe oberhalb eine 2. Querverbindung angebracht ist. — Die lichte Entfernung von der Schienenoberkante zur obern Querverbindung soll wenigstens 4,8 M. betragen (diese Maassangaben entsprechen dem Normalprofil des Vereins deutscher Eisenbahnen). — Die Entfernung der Querträger betrage wieder 1,8 M.

Fig. 60.



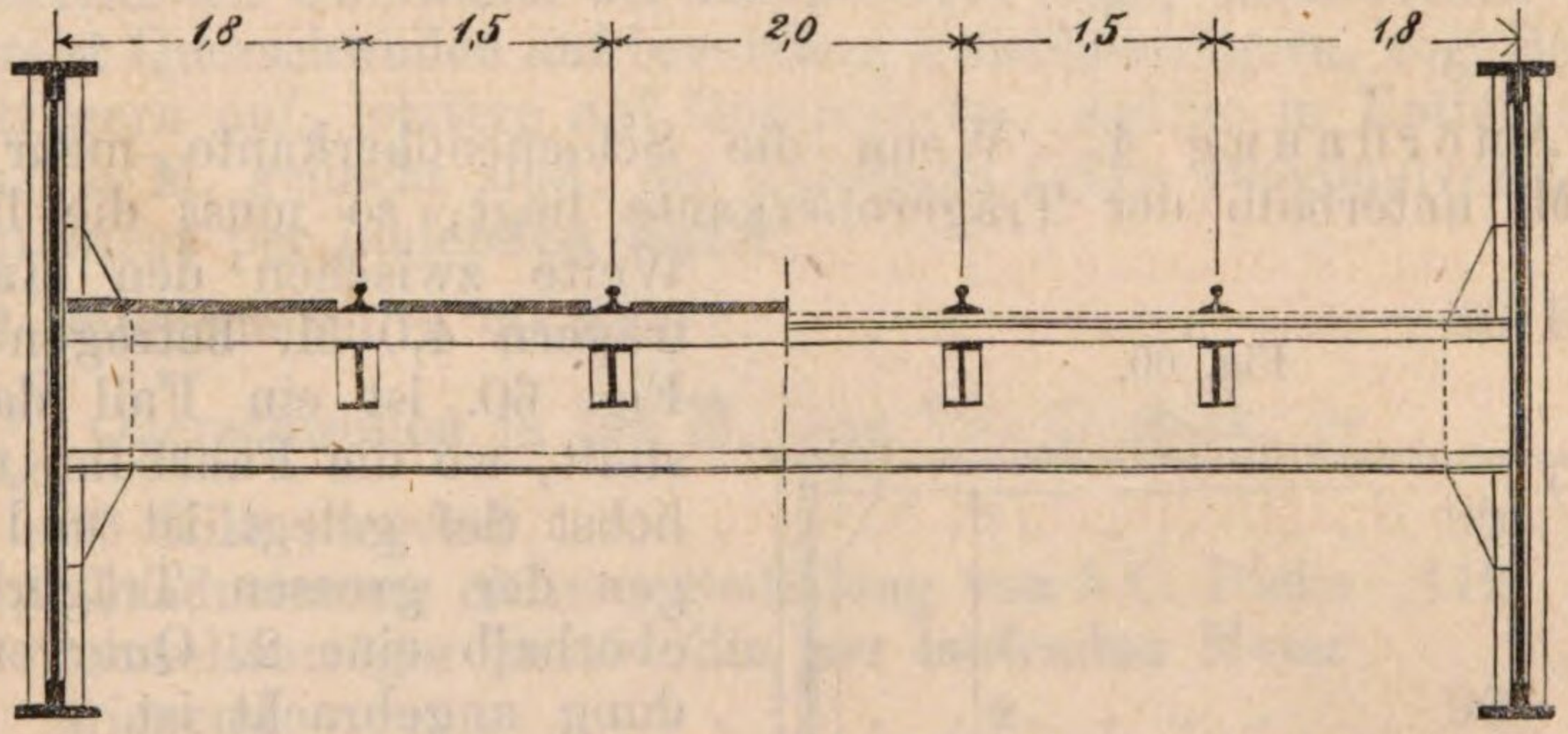
Das Gewicht der Fahrbahn (ohne die 2. Querverbindung und ohne die Diagonalverbindungen) beträgt:

2 Fahrschienen	80 Kilo
$\frac{1,0}{0,9}$ Querschwellen, je 4,5 M. lang, $^{24}/_{15}$ Cent. stark, je 120 Kilo wiegend	133 „
4,0 Quadratmeter eichene Bedielung von 5 C. Dicke	150 „
2 Schwellenträger je 45 Kilo per laufenden Meter wiegend	90 „
$\frac{1,0}{1,8}$ Querträger, je C. 550 wiegend	307 „
	760 Kilo.

Hätte man die Entfernung der Querträger grösser, z. B. gleich 2,7 M. genommen, so hätte sich das Gewicht nicht wesentlich vermehrt; die Schwellenträger wären per laufenden Meter allerdings beinahe noch einmal so schwer geworden, anderseits ist aber nur $\frac{1,0}{2,7}$ des Querträgergewichts zu rechnen, welch letzteres etwa 700 K. betragen hätte.

Anordnung 5. Es sind 2 Geleise zwischen den 2 Hauptträgern angenommen, wodurch, wie aus Fig. 61. ersichtlich, eine

Fig. 61.



Distanz der Hauptträger gleich 8,6 M. bedingt ist. — Die Entfernung der Querträger betrage 3,6 M., auf welche Weite die Last durch die Schwellenträger übertragen werden muss. Das Gewicht der Fahrbahn berechnet sich per laufenden Meter für 2 Geleise:

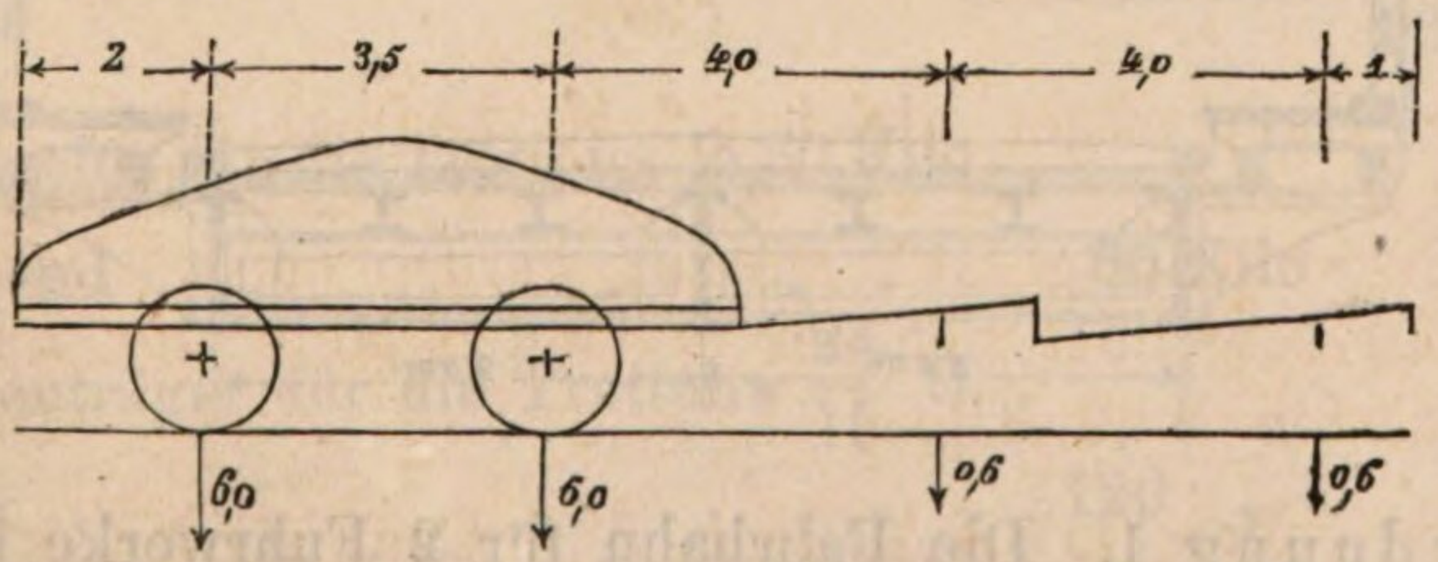
4 Fahrschienen à 40 Kilo	160 Kilo
$\frac{1,0}{0,9}$ Querschwellen, je 8,5 M. lang, $^{24}/_{15}$ Cent. stark, je 225 Kilo wiegend	250 „
7,6 Quadratmeter eichene Bedielung von 5 C. Stärke	285 „
4 Schwellenträger, per laufenden M. 100 K. wiegend	400 „
$\frac{1,0}{3,6}$ Querträger, je 1818 Kilo wiegend	505 „
	1600 Kilo,

somit per laufenden Meter für ein Geleise 800 Kilo; je nach den bestehenden Verhältnissen kann dieses Gewicht ansehnlich vermindert werden, indem man den Querträgern und Schwellenträgern eine grössere Höhe gibt, wodurch der Gurtungs-Querschnitt derselben verringert wird.

67. Bei Strassenbrücken ist die Annahme einer gleichförmig vertheilten Ueberlast nur bei grossen Spannweiten thunlich; in diesem Falle ist als Ueberlast ein Menschengedränge zu betrachten, welches gewöhnlich zu 360 Kilo pro Quadratmeter gerechnet wird, aber 560 Kilo beträgt, wenn die Menschen so dicht stehen, dass sie sich nicht bewegen können. — Wenn die Brücke eine Beschotterung trägt, welche seit neuerer Zeit der Holzüberlage ziemlich allgemein vorgezogen wird, so wird die gleichförmig vertheilte Last durch diesen zur Tragkraft Nichts beitragenden Ballast sehr vermehrt; diese Beschotterung ist bei 20 C. Dicke zu 440 Kilo per Quadratmeter zu rechnen. — Eine Strassenbrücke von grösserer Spannweite hat somit bei 5 Meter Breite mit Beschotterung per laufenden Meter 4000 Kilo ausser dem Gewicht der Construction selbst zu tragen; es kommt diess laut Tabelle XVII. der variablen Belastung einer eingeleisigen Brücke gleich; durch ähnliche Betrachtungen können die für Eisenbahnbrückenträger erhobenen Gewichte für Strassenbrücken von beliebiger Breite annähernd als Maassstab benützt werden. — Bei genaueren Berechnungen sind aber das Gewicht der Fahrbahn und die wirkliche Belastung genau zu erheben, wofür im Folgenden einige Anhaltspunkte gegeben werden sollen.

Ausser der Eingangs dieser Nummer aufgeführten Belastung durch ein Menschengedränge kann ein anderer Theil der Brücke durch Lastwagen bedeckt sein, deren concentrirte Gewichte bei geringeren Spannweiten weit grössere Angriffsmomente verursachen.

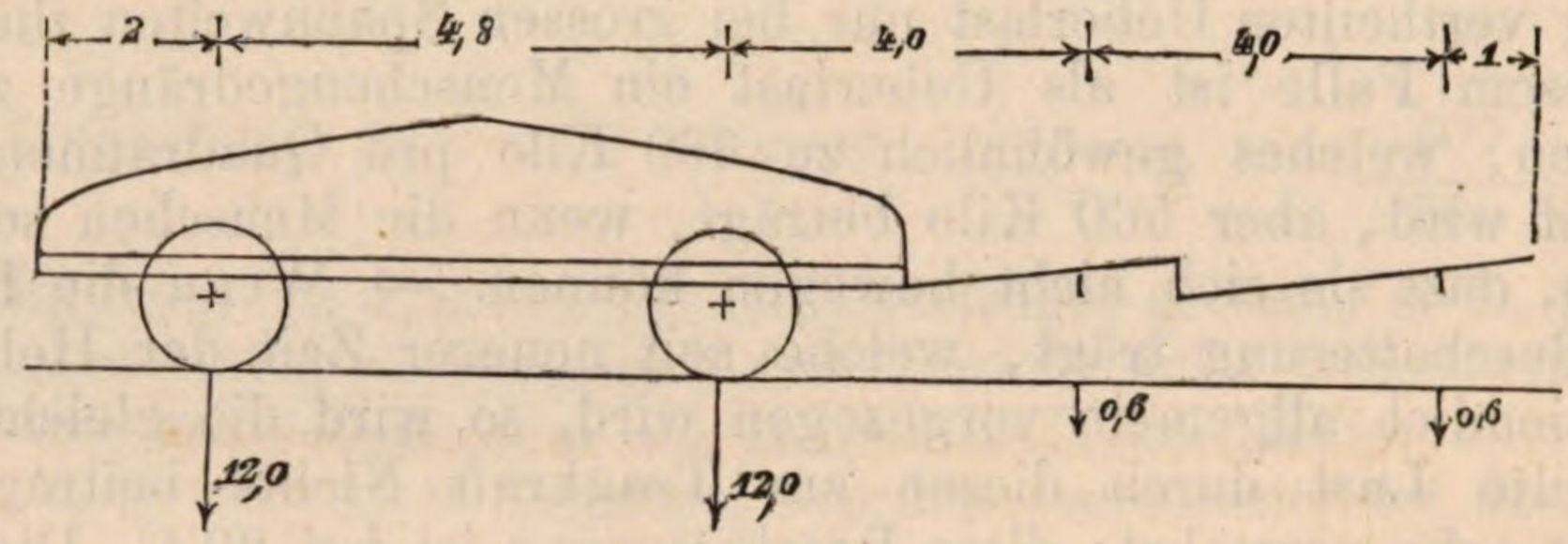
Fig. 62.



In Fig. 62. ist für schweres Landfuhrwerk die Vertheilung der Lasten skizzirt; 2 Pferde sind hiebei zu 0,6 tons gerechnet; ein solcher Wagen erfordert eine Breite von 2,5 M., so dass bei 5 M. Fahrbahnbreite die gleichzeitige Passage zweier Wagen in Aussicht genommen werden muss.

Bei bedeutenderen Strassen muss aber ein grösseres Wagengewicht gerechnet werden; es können z. B. schwere Maschinen, Dampfkessel etc. transportirt werden; für diese grössten Lasten ist die in Fig. 63. skizzirte Lastvertheilung anzunehmen; auch für

Fig. 63.

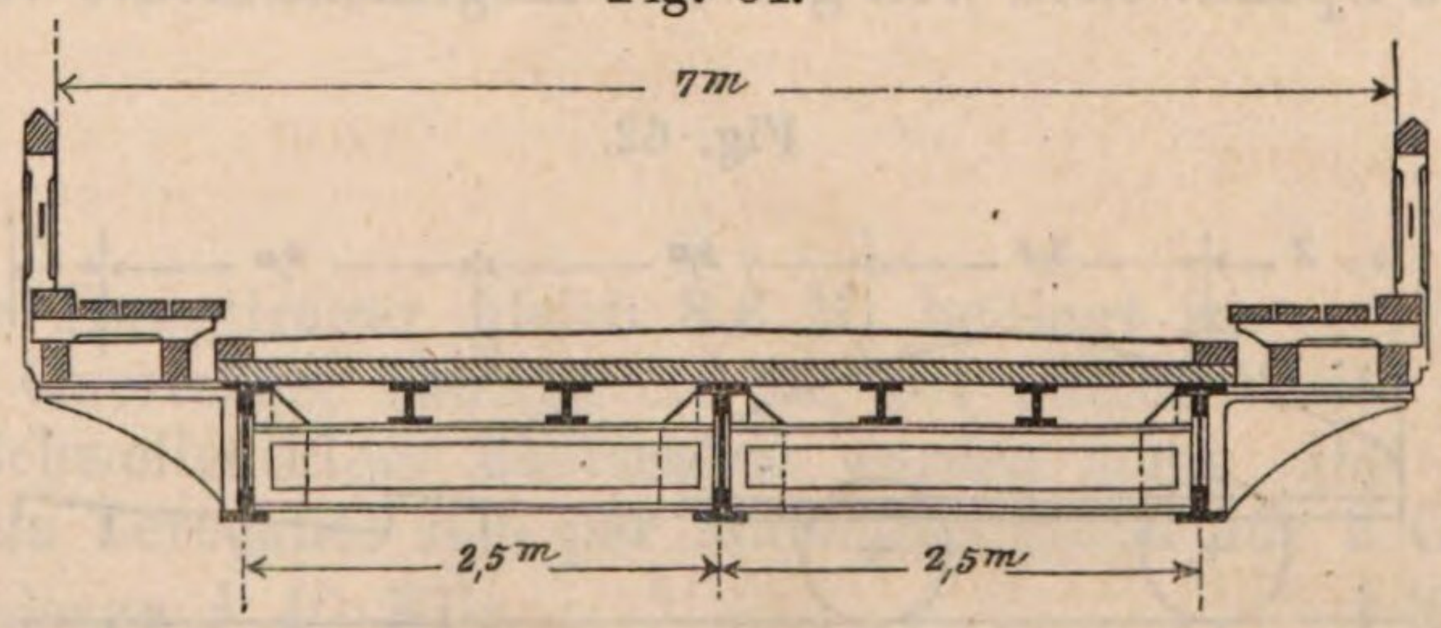


diese Wagen rechnen wir 2,5 M. Breite; allein es braucht auch bei genügender Breite die gleichzeitige Passage zweier so schweren Wagen nicht in Rücksicht genommen zu werden; man geht vielmehr sicher genug, wenn man den in Fig. 62. gezeichneten Wagen als weitere Last zugibt.

Die Angriffsmomente der Hauptträger werden nach Gleichung 100—102 berechnet; hiebei setzt sich die gleichförmig vertheilte Last p zusammen aus dem Gewicht der Hauptträger, der Fahrbahn und dem Menschengedränge, das auf den Fusswegen oder überhaupt der nicht mit Wagen bedeckten Brückenbreite vertheilt ist.

Die Gewichte der Fahrbahn sind im Nachfolgenden für einige Grundtypen berechnet.

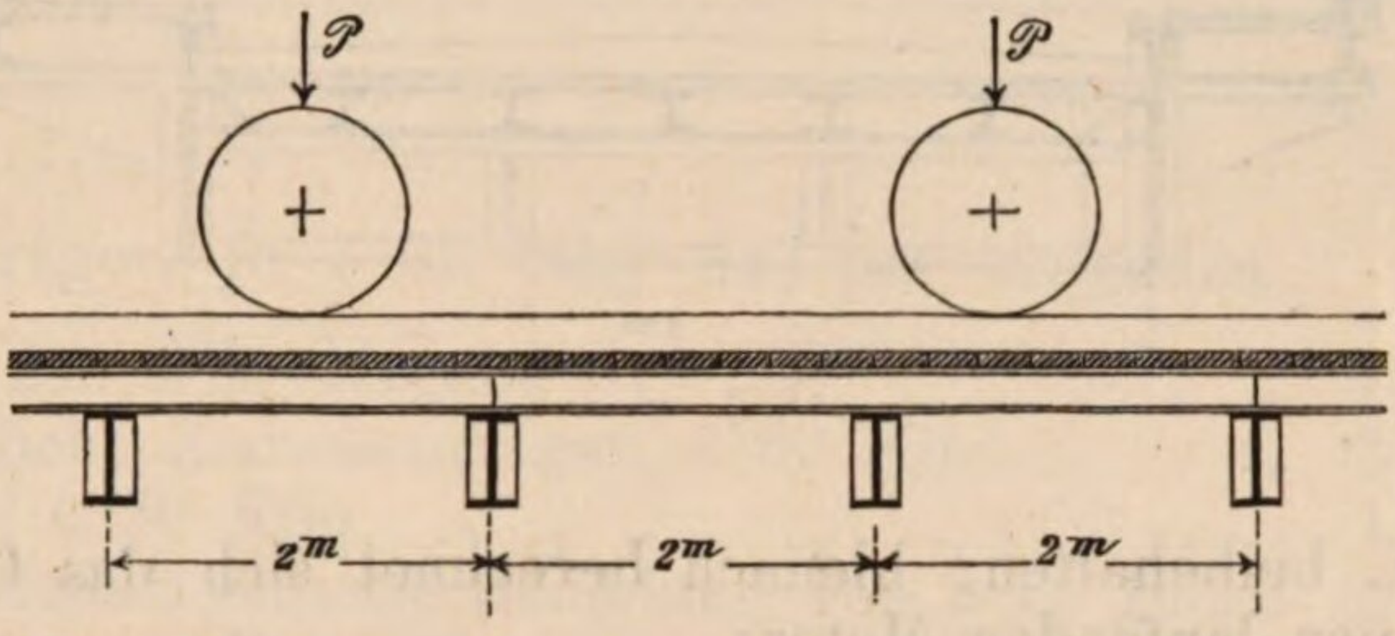
Fig. 64.



Anordnung 1. Die Fahrbahn für 2 Fuhrwerke ist, wie in Fig. 63. dargestellt, zu 5 M. Breite angenommen; beiderseits sind erhöhte Fusswege von je 1 M. Breite, welche auf Consolen ruhen. — Da die Bedielung der Fahrbahn oberhalb der Hauptträger angebracht ist, so wird die Zahl der letzteren nicht beschränkt; vorstehend sind 3 Hauptträger in Entfernungen von je 2,5 M. angenommen. — Auf den Querträgern sind kleine Längenträger (Zwischenträger) ange-

ordnet, welche unter sich und von den Hauptträgern von Mitte zu Mitte 0,83 M. abstehen; die lichte Weite, welche durch die eichene Bedielung überspannt werden muss, beträgt somit etwa 0,7 M. Die Entfernung zweier Querträger betrage 2 M., auf welche Entfernung jeder Zwischenträger die Last eines Rades übertragen muss. Wie aus Fig. 65. ersichtlich, so ist die Last in

Fig. 65.



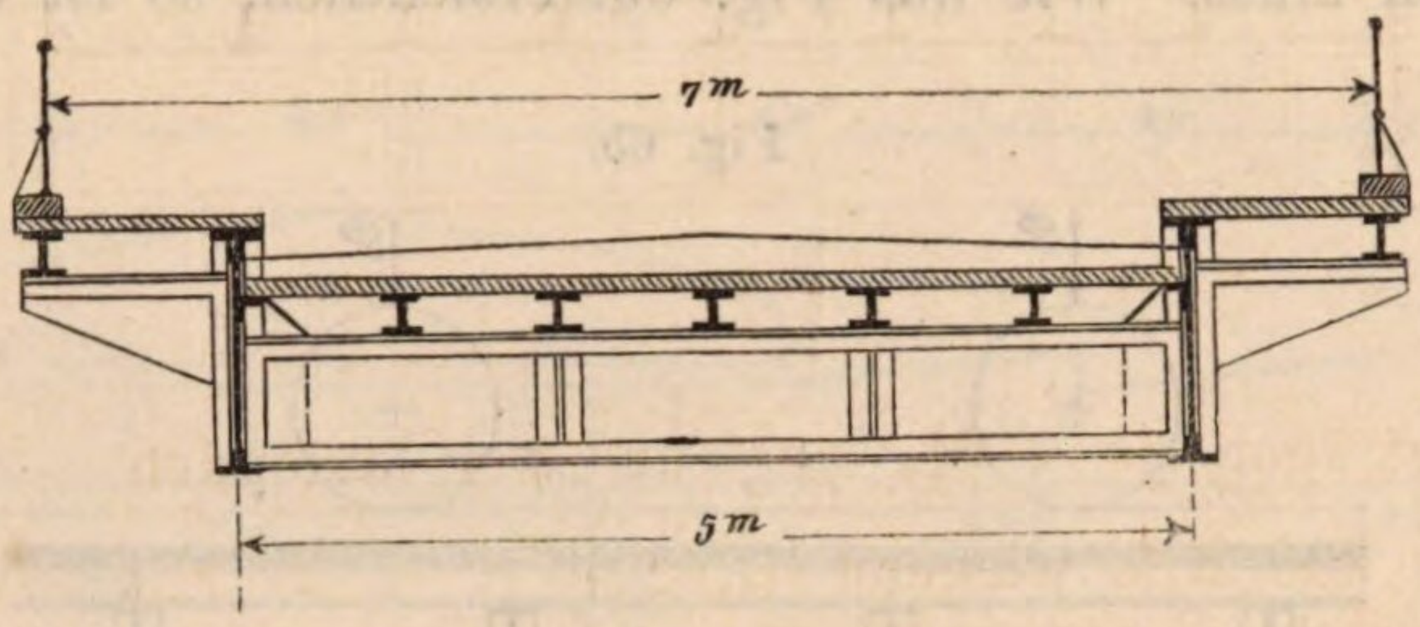
der Mitte wirkend zu rechnen und sind desshalb diese Zwischenträger verhältnissmässig kräftig zu halten.

Das Gewicht der Fahrbahn beträgt bei dieser Anordnung per laufenden Meter:

$\frac{2,0}{2,0}$ Querträger je 2,5 M. lang à 80 Kilo per laufenden Meter wiegend . .	200 Kilo	
4 Zwischenträger (Fahrbahnträger) von Schmiedeisen, per laufenden Meter 60 Kilo wiegend	240 „	
5,0 Quadratmeter eichene Bedielung von 8 Cent. Dicke	300 „	
5,0 Quadratmeter, 20 Cent. dicke Beschotterung	2200 „	
		2940 Kilo
$\frac{2,0}{2,0}$ Consolen für die Trottoirs je 60 Kilo wiegend	60 Kilo	
4 Längenträger für die Trottoirs $\frac{24}{15}$ C. stark	120 „	
2,0 Quadratmeter 6 Cent. dicke eichene Bedielung	90 „	
Das Geländer mag per laufenden Meter 60 Kilo wiegen, somit beiderseitig	120 „	
		390 Kilo
		3370 Kilo

Anordnung 2. Wir behalten die Breite der Fahrbahn bei, wenden aber nur 2 Hauptträger an; die übrigen Modificationen sind aus der Fig. 66. ersichtlich; die Entfernung der Querträger

Fig. 66.

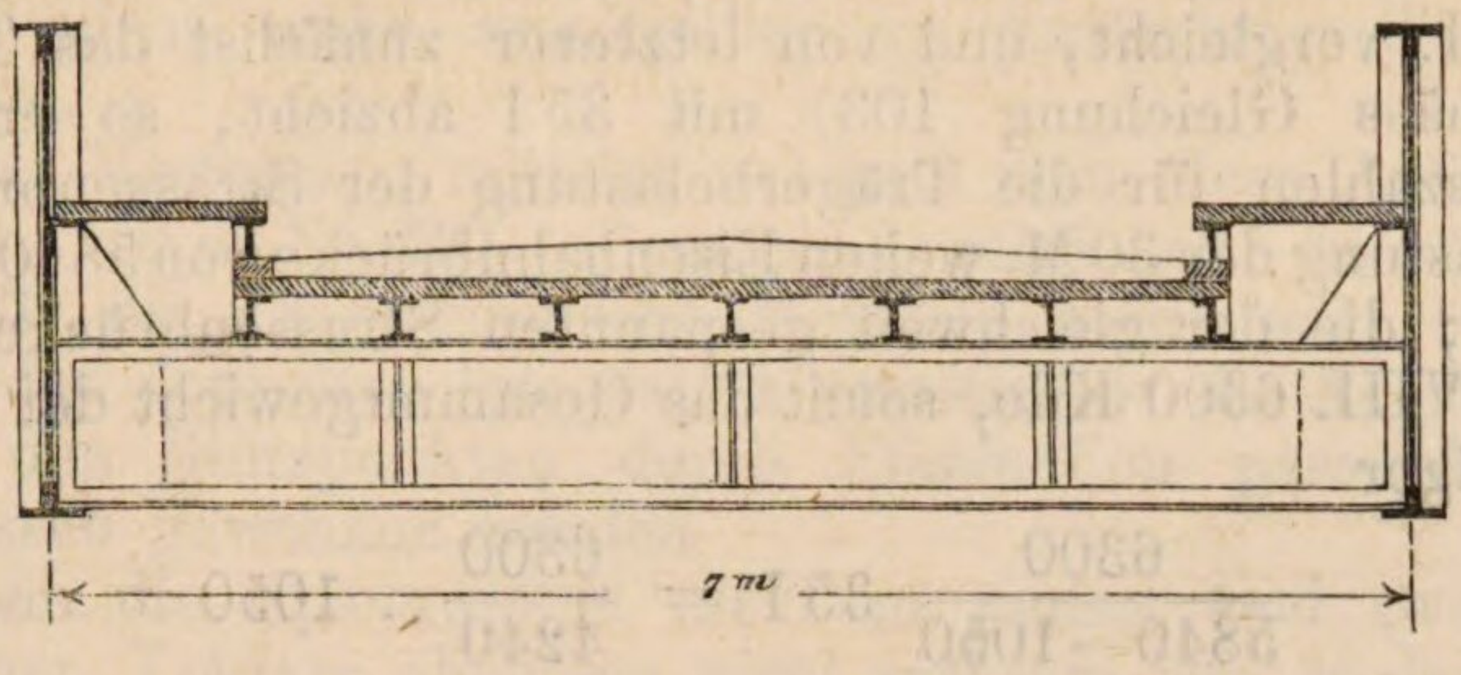


ist zu 2 M. beibehalten; hienach berechnet sich das Gewicht der Fahrbahn per laufenden Meter:

$\frac{1,0}{2,0}$	Querträger, je 5 M. lang, per laufenden Meter 180 Kilo wiegend .	450 Kilo	
15	Zwischenträger, per laufenden Meter 60 Kilo wiegend	300 „	
5,0	Quadratmeter eichene Bedielung von 8 C. Dicke	300 „	
5,0	Quadratmeter, 20 Cent. dicke Beschotterung	2200 „	
			3250 Kilo
$\frac{2,0}{2,0}$	Consolen für die Trottoirs, à 60 Kilo	60 Kilo	
2	schmiedeiserne Längenträger für die Trottoirs	100 „	
2,0	Quadratmeter eichene Bedielung von 6 Cent. Dicke	90 „	
	Geländer	100 „	
			350 Kilo
			3600 Kilo.

Anordnung 3. Wenn die beiden Hauptträger mehr als Trottoirhöhe über die Fahrbahn hervorragen, so muss für 2 Fuhrwerke die lichte Fahrbahnbreite 6,0 M. genommen werden; es ist in diesem Falle im Allgemeinen ökonomischer wie in Fig. 65. auch die Trottoirs zwischen den Hauptträgern anzuordnen. Wir behalten die Entfernung der Hauptträger von 2 M. bei, wonach auch die Zwischenträger dieselben bleiben können. — Das Gewicht der Fahrbahn beträgt per laufenden Meter:

Fig. 67.



$\frac{1,0}{2,0}$ Querträger, je 7 M. lang und per laufenden

Meter 200 Kilo wiegend	700	Kilo
5 gewöhnliche Zwischenträger, à 60 Kilo . . .	300	„
2 grössere à 80 Kilo	160	„
5 Quadratmeter eichene Bedielung von 8 C. Dicke	300	„
5 Quadratmeter Beschotterung von 20 Cent. Dicke	2200	„
2 Quadratmeter eichene Bedielung von 6 C. Dicke	90	„
	3750	Kilo

Wir können für eine Strassenbrücke, welche incl. Trottoirs 7 M. breit ist, 3500 K. Fahrbahngewicht per laufenden Meter rechnen, falls Beschotterung angewendet ist; wenn letztere fehlt, so reducirt sich das Fahrbahngewicht auf 1500 Kilo; als Ueberlast soll auf Trottoirbreite 400 Kilo Menschengedränge, und ausserdem 2 Reihen der in Fig. 62. skizzirten Wagen gerechnet werden, welche in Abständen von je 15 M. hinter einander gedacht sind; hienach stellt sich die von den Hauptträgern aufzunehmende gleichförmig vertheilte Last folgendermaassen dar (zunächst ohne Berücksichtigung des Eigengewichts der Träger):

Tabelle XVIII.

Gleichförmig vertheilte Last in Kilogr.	7 M.	10 M.	15 M.	20 M.	30 M.	40 M.	60 M.	100 M.
Fahrbahn ohne Beschotterung	1500	1500	1500	1500	1500	1500	1500	1500
Beschotterung	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000
Menschengedränge auf den Trottoirs	800	800	800	800	800	800	800	800
2 Wagenreihen auf gleichförmige Belastung reducirt	3450	3120	2560	2100	2000	2000	2000	2000
Gesammte gleichförmige Belastung der Träger q	7750	7420	6860	6400	6300	6300	6300	6300

Wenn man diese Totallasten q mit den Totallasten q der Tabelle XVII. vergleicht, und von letzterer zunächst das Trägergewicht gemäss Gleichung 103) mit 35 l abzieht, so erhält man Verhältnisszahlen für die Trägerbelastung der Strassenbreite; die Trägerbelastung der 30 M. weiten Eisenbahnbrücke von 5840 — 35 l = 4240 Kilo; die der gleichweit gespannten Strassenbrücke ist nach Tabelle XVIII. 6300 Kilo, somit das Gesammtgewicht der Strassenbrückenträger

$$\frac{6300}{5840-1050}\ 35\,l = \frac{6300}{4240}\ .\ 1050$$

Hienach sind in nachfolgender Tabelle XIX. die Trägergewichte für die einzelnen Spannweiten ermittelt und durch Hinzufügung des Fahrbahngewichts ist so eine annähernde Berechnung des Gewichts einer schmiedeisernen Strassenbrücke von 7 Meter Breite gegeben.

Tabelle XIX.

Spannweite	7 M.	10 M.	15 M.	20 M.	30 M.	40 M.	60 M.	100 M.
Gewicht der Hauptträger	350	480	770	1000	1500	2200	3300	5000
Gewicht einer Fahrbahn ohne Schotter	1500	1500	1500	1500	1500	1500	1500	1500
Mehrgewicht der Beschotterung	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000
Totaleigengewicht der Brücke p	3850	3980	4270	4500	5000	5700	6800	8500

Bei den grösseren Spannweiten musste durch Probiren das Totaleigengewicht schon bei Berechnung des Trägergewichts in Rücksicht genommen werden. Diese Tabelle XIX. kann insbesondere benützt werden, um die Momente $\mathfrak{M}$ und Kräfte $\mathfrak{V}$ für die einzelnen Hauptträgerpunkte nach den Gleichungen 100)—102) und hienach die genauen Trägergewichte zu brechnen.

Wenn die Breite der Strassenbrücke von 7 M. verschieden ist, so sind entsprechende Reductionen vorzunehmen; es kann hiefür keine allgemeine Vorschrift gegeben werden; es können aber hiebei die in den Tabellen XVIII. und XIX. gegebenen Notizen mehrfach in Anwendung kommen.

§. 7. Continuirliche Träger.

68. Bei den continuirlichen Trägern sind, wie schon in N° **20.** erwähnt, die Rückwirkungen der Stützpunkte (Auflagerdrücke)

nicht als bekannt anzunehmen, da die Bedingungen des Gleichgewichts nicht mehr unmittelbar zu Auffindung dieser Kräfte ausreichen.

Diess Verfahren, mittelst welchem man diese Auflagerdrücke auffindet, ist in N°. **20.** allgemein beschrieben; es ist aber auch in N°. **21.** die Clapeyeronsche Methode entwickelt, wo mit Umgehung der doppelten Integration unmittelbar die Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ auf den Stützpunkten durch Elimination passend gewählter Hilfsgrössen gewonnen werden.

Wenn die Spannweiten nicht zu gering sind (was bei continuirlichen Trägern ohnedem nicht rathsam ist), so darf wie beim frei aufliegenden Träger, das Eigengewicht und die zufällige Last je auf eine gewisse Länge gleichförmig vertheilt angenommen werden, und zwar nehmen wir je auf die Länge einer Oeffnung gleichförmige Totallast an, der Art aber, dass jede Oeffnung der Reihe nach als belastet oder blos mit dem Eigengewicht behaftet betrachtet werden kann; es ist diess nicht nur mit Rücksicht auf grössere Einfachheit der Formeln bedingt, — da die Rechnung sonst zu complicirt und fast unausführbar wäre — sondern wir erhalten dadurch auch in Wirklichkeit eine Reihe von Grenzlagen für die Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ und Vertikalkräfte $\mathfrak{V}$, welche die Umhüllungslinien der $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ darstellen; in den graphischen Darstellungen der Tafeln IV. und V. (am Schlusse des Buchs) sind solche Grenzlagen der Kurven $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ für 2 und 3 Oeffnungen gezeichnet, und können diese Figuren zunächst zu nachfolgender Betrachtung dienen. — Sowie nämlich bewiesen werden kann, dass die Maximalwerthe der mathematisch genauen Umhüllungslinie mit dem Maximalwerthe der stellvertretenden Kurven übereinstimmen, so werden auf die übrige Länge nur sehr untergeordnete Abweichungen stattfinden, Abweichungen, welche nur darin ihren Grund haben können, dass die stellvertretende Umhüllungskurve keine stetige Linie ist, sondern aus einzelnen Kurvenzweigen besteht.

Wenn die absolut grössten Werthe $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ für jeden Querschnitt gefunden sind, so werden wir wie in N°. **62.** die Aufgabe als gelöst ansehen; wir wählen in unsern graphischen Darstellungen von den gleichzeitigen Werthen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ stets dasjenige Paar aus, welches für das betreffende Constructionsglied die grösste Krafteinwirkung anzeigt und sind sicher, dass keine andere sonst vorkommende Belastung das fragliche Constructionsglied stärker in Anspruch nehmen wird.

Zur vollständigen Entwicklung gehört noch, dass man genau die Grenzen kennt, innerhalb denen die Punkte $\mathfrak{V} = 0$ und $\mathfrak{M} = 0$ in jeder Oeffnung sich bewegen. Es ist diess diejenige Distanz, auf welche $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ in Folge der Bewegung der Last ihre Vorzeichen ändern.

Die oben beschriebenen Grenzlagen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ geben nun zugleich die Grenzlagen für die Punkte $\mathfrak{V} = 0$ und $\mathfrak{M} = 0$, denn

es kann bewiesen werden, dass die grössten und kleinsten Werthe der Auflagerdrücke in den betrachteten Fällen enthalten sind; da die Last gleichmässig vertheilt angenommen ist, so ist damit auch die grösste und kleinste Entfernung der gedachten Nullpunkte gegeben.

69. Aehnlich wie beim frei aufliegenden Träger bezeichnen auch bei den continuirlichen Trägern:

p das Eigengewicht der Brücke,
k die zufällige Last,
$q = p + k$ die Totallast

und zwar je auf die Längeneinheit einer Brückenöffnung berechnet.

Wir haben in N°. **64.** gesehen, dass bei Eisenbahnbrücken den Einflüssen concentrirter Lasten dadurch Rechnung getragen wird, dass man die Werthe k nach der Grösse der Spannweite wechselnd annimmt; wir haben aber ausserdem für die einseitige Belastung je grössere Werthe k' annehmen müssen (vergleiche Tabelle XVII.); letzteres ist bei continuirlichen Trägern nicht nothwendig, denn einmal sind die Werthe k und k' bei grösseren Spannweiten weniger verschieden, und werden wir in der Folge sehen, dass die Continuität der Träger nur bei erheblicher Weite der Oeffnungen angewendet werden soll; sodann vertheilt sich eine concentrirte Last durch den Zusammenhang mehrerer Oeffnungen gleichförmiger auf die Auflager, so dass wir hinreichend grosse Grenzwerthe erhalten, wenn wir bei continuirlichen Trägern die Werthe k und q der Tabelle XVII. für sämmtliche Belastungsarten gleichförmig anwenden und von den Werthen k' und q' ganz absehen. — Die Werthe k und q sind für die zu betrachtenden grösseren Spannweiten von den wirklichen auf die Brückenlänge vertheilten und auf die Längeneinheit reducirten Belastungen nicht so sehr verschieden, dass eine bedenkliche Ungenauigkeit zu befürchten wäre.

70. Wir gehen nunmehr zu dem Fall von zwei mit einander verbundenen Oeffnungen über. — Auch hier wird die gleichzeitige Belastung beider Oeffnungen die Balken ganz besonders in Anspruch nehmen; wenn nun aber wiederum eine Oeffnung entlastet wird, so hat diess eine Senkung der noch belasteten Oeffnung zur Folge und letztere wird daher partiell mehr in Anspruch genommen sein, als bei der Belastung der ganzen Brückenlänge. Diese Senkung wird solange zunehmen, bis die eine Oeffnung ganz entlastet ist.

Uebereinstimmend mit dieser Betrachtung zeigt denn auch die mathematische Untersuchung, dass bei Belastung der ersten Oeffnung AB und vollständiger Entlastung der Oeffnung BC max $\mathfrak{M}$ für AB seinen grössten, für BC seinen kleinsten Werth hat, und dass gleichzeitig A seinen grössten, C seinen kleinsten Werth erhält, das Umgekehrte findet selbstverständlich statt, wenn AB

vollständig entlastet und BC belastet ist. — Am Mittelpfeiler B haben $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$ ihren grössten Werth, wenn beide Oeffnungen gleichzeitig belastet sind. — Den mathematischen Beweis dieses Satzes hat Hr. Bänsch im Jahrgang 1857 der berliner Zeitschrift für Bauwesen geliefert.

Wir legen demgemäss unseren Betrachtungen drei Fälle der Belastung zu Grunde:

1) Vollständige Belastung von AB und BC,
2) vollständige Belastung von AB, vollständige Entlastung von BC,
3) vollständige Entlastung von AB, vollständige Belastung von BC.

Die für diese drei Fälle gleichzeitig eingezeichneten Kurven $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ werden nach den in N°. **68.** entwickelten Betrachtungen die Umhüllungslinien sämmtlicher möglichen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ sehr annähernd darstellen. — Da aber für jedes einzelne Constructionsglied nur gleichzeitige Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ maassgebend sein können, so werden Angriffsmoment und Vertikalkraft im Allgemeinen nicht gleichzeitig ihre Maximalwerthe haben; diess findet vielmehr blos in der Nähe der Mittelpfeiler statt.

Ein Blick auf die graphischen Darstellungen der Tafel IV. wird das Gesagte deutlicher machen, und wird zu gleicher Zeit klar werden, wie nothwendig es ist, neben der Maximallast auch die grössten einseitigen Belastungen in Betracht zu ziehen. — Es ist diess bei der Brittaniabrücke und den grossen preussischen Brücken über die Nogat bei Marienburg und über die Weichsel bei Dirschau allerdings nicht geschehen, und hat bei dem grossen Eigengewicht dieser Brücken weniger Nachtheil gebracht; wenn man aber, gestützt auf diese Vorgänge auch bei kleineren Brücken blos die Kurven der Maximallast berücksichtigen wollte, so würde man damit einen entschiedenen Fehler begehen.

Fig. 68.

71. Wir betrachten den allgemeinen Fall, dass beide Oeffnungen verschiedene Weite haben, es sei AB = a, BC = b; die Oeffnung AB sei mit q_1, die Oeffnung BC mit q_2 per Längeneinheit belastet; die sämmtlichen Stützpunkte befinden sich in einer Horizontalebene. — Zur Bestimmung der Angriffsmomente und Vertikalkräfte bedienen wir uns in diesem einfachen Falle des in N°. **20.** beschriebenen Verfahrens, welches, wie dort bemerkt, die unbekannten Rückwirkungen der Stützpunkte auffinden lehrt.

Der Coordinatenursprung wird in B angenommen; die Richtung nach A sei die positive, der Werth EΘ sei mit ε bezeichnet und ist angenommen, dass Θ und somit auch ε eine constante Grösse sei.

Nach Gleichung 41) erhalten wir für AB:

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = (a - x)^2 \frac{q_1}{2} - A\,(a - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

sodann durch einmaliges Integriren:

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \frac{q_1 a^2 x}{2} + \frac{q_1 x^3}{6} - \frac{q_1 a x^2}{2} - Aax + \frac{Ax^2}{2} + \varepsilon tg\varphi \quad . \quad \text{II.}$$

wo φ den Winkel bezeichnet, den die elastische Linie bei B mit dem Horizont bildet; eine zweite Integration ergibt:

$$\varepsilon . y = \frac{q_1 a^2 x^2}{4} + \frac{q_1 x^4}{24} - \frac{q_1 a x^3}{6} - \frac{Aax^2}{2} + \frac{Ax^3}{6} + \varepsilon tg\varphi . x \quad \text{III.}$$

Die Constante fiel hier aus, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ wird.

Ebenso findet man für das Stück BC, wenn B wiederum als Coordinatenursprung angenommen wird:

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = (b - x)^2 \frac{q_2}{2} - C\,(b - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV.}$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \frac{q_2 b^2 x}{2} + \frac{q_2 x^3}{6} - \frac{q_2 b x^2}{2} - Cbx + \frac{Cx^2}{2} - \varepsilon tg\varphi \quad . \quad \text{V.}$$

$$\varepsilon . y = \frac{q_2 b^2 x^2}{4} + \frac{q_2 x^4}{24} - \frac{q_2 b x^3}{6} - \frac{Cbx^2}{2} + \frac{Cx^3}{6} - \varepsilon tg\varphi . x \quad \text{VI.}$$

Für $x = a$ wird in Gleichung III. $y = 0$, für $x = b$ wird in VI. ebenso $y = 0$.

Setzt man diese Werthe und Gleichung III. und VI. ein und multiplicirt dieselbe mit a, beziehungsweise b, und addirt beide Gleichungen, so eliminirt sich die Unbekannte φ und man erhält:

$$q_1 a^3 + \frac{q_2 b^3}{8} - \frac{Aa^2}{3} - \frac{Cb^2}{3} = 0 \quad 104^a)$$

Zu dieser Gleichung kommen nun noch 2 andere, welche aus den Bedingungen des Gleichgewichts hervorgehen:

$$A + B + C = aq_1 + bq_2 \quad . \quad . \quad . \quad 104^b)$$

$$\frac{q_1 a^2}{2} - Aa = \frac{q_1 b^2}{2} - Cb \quad . \quad . \quad . \quad 104^c)$$

Diese 3 Gleichungen $104^a)$—$104^c)$ sind jederzeit ausreichend, um die 3 Unbekannten A, B und C zu finden.

Für die meisten in der Praxis vorkommenden Fälle vereinfachen sich aber diese Gleichungen, indem die Spannweiten in der Regel gleich gross sind und erhält man für $a = b$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{b}{16}(7\,q_1 - q_2) \\ B &= \frac{b}{16}\,10\,(q_1 + q_2) \\ C &= \frac{b}{16}(7\,q_2 - q_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 105)$$

In diese Formel 105) müssen nun für die 3 oben angeführten Fälle der jeweiligen Belastungen jede Oeffnung eingeführt werden, um die Auflagerdrücke zu erhalten:

1) für die Maximallast ist zu setzen

$$q_1 = q_2 = (p + k) = q$$

woraus nach Gleichung 105) folgt:

$$A = C = \frac{3}{8}\,qb$$

$$B = \frac{10}{8} \cdot qb$$

2) für die Belastung von AB folgt

$$q_1 = q \text{ und } q_2 = p$$

woraus

$$A = \frac{1}{16}\left(7 - \frac{p}{q}\right) qb$$

$$C = \frac{1}{16}\left(7\,\frac{p}{q} - 1\right) qb$$

$$B = \frac{10}{16}\left(1 + \frac{p}{q}\right) qb$$

3) für die Belastung von BC folgt

$$q_1 = p \text{ und } q_2 = q$$

woraus

$$A = \frac{1}{16}\left(7\,\frac{p}{q} - 1\right) qb$$

$$C = \frac{1}{16}\left(7 - \frac{p}{q}\right) qb$$

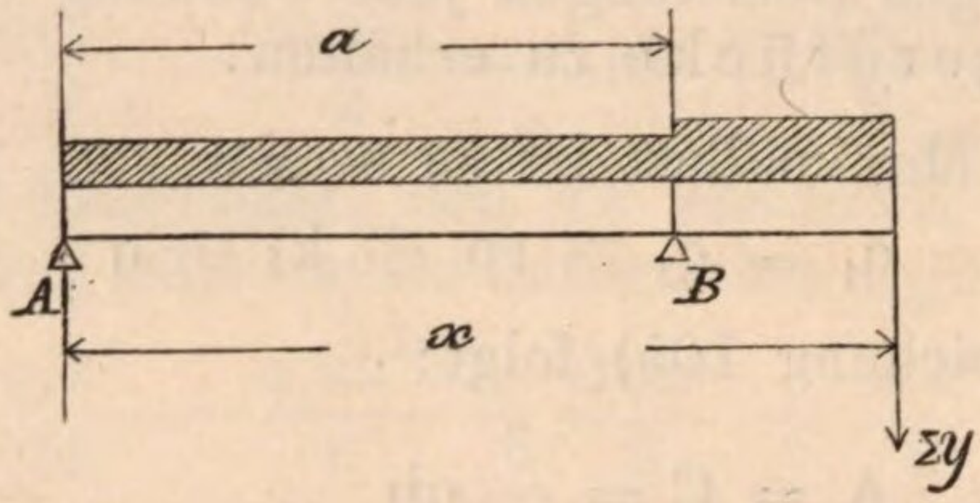
$$B = \frac{10}{16}\left(1 + \frac{p}{q}\right) qb$$

Nachdem auf diese Weise die Auflagerdrücke A, B und C gefunden sind, kann man aus den Gleichungen II. oder V. die Grösse $\varepsilon tg\varphi$ bestimmen und erhält dann in den Gleichungen III. und VI. nach Einsetzung des Werths $\varepsilon tg\varphi$ die Gleichung der elastischen Linie, welche die Einsenkung an jeder Stelle angibt.

72. Wenn die Auflagerdrücke bekannt sind, so findet sich $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ durch eine einfache Anwendung der Bedingungen des Gleichgewichtes 2) und 4), welche wir für unsern Fall speciell anschreiben.

Wir verlegen den Coordinatenursprung in den Querschnitt x selbst (siehe Fig. 69.), und bezeichnen wieder mit q_1 und q_2 die Belastungen der beiden Oeffnungen:

Fig. 69.



so ist für das Stück AB

$$\mathfrak{V} = A - q_1 x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 106)$$

$$\mathfrak{M} = Ax - \frac{q_1 x^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 107)$$

für das Stück BC, indem man eine Abscisse $x_1 = x - a$ einführt:

$$\mathfrak{V} = A + B - q_1 a - q_2 x_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 108)$$

$$\mathfrak{M} = A\,(a + x_1) + Bx_1 - q_1 a \left(x_1 + \frac{a}{2}\right) - q_2 \frac{x_1^2}{2} \quad 109)$$

73. Wenn man in den Gleichungen 106—109) die verschiedenen Werthe q_1 und q_2 und die hiefür nach Gleichung 104) oder 105) berechneten Auflagerdrücke A, B und C einführt, so erhält man für jeden beliebigen Querschnitt x die ihm zugehörigen Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$. — Um das Resultat dieser Berechnungen zur Anschauung zu bringen, sind in den graphischen Darstellungen der Tafel IV. für die verschiedenen Belastungsarten die Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ als Ordinaten aufgetragen wie schon mehrfach erwähnt ist. — Es war aber nicht nöthig, nach den Gleichungen 106—109) eine grössere Reihe von einzelnen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ zu berechnen, da eine nähere Untersuchung der fraglichen Kurven dieselben aus wenigen Punkten construiren lehrt.

Wir bemerken zuerst, dass die Gleichungen 106) und 108) gerade Linien darstellen und ist diess eine nothwendige Folge der gewählten gleichförmigen Belastungsart. — Die Neigung dieser Geraden gegen die Abscissenlage ist nur von der Belastung abhängig und zwar sind die trigonometrischen Tangenten den Belastungen Grösse q_1 und q_2 direct proportional.

Die Kurven $\mathfrak{M}$ sind wie bei einer Oeffnung, so auch bei con-

tinuirlichen Trägern Parabeln mit senkrechter Axenrichtung, deren Parameter den Quotienten $\frac{1}{q_1}$ oder $\frac{1}{q_2}$ direct proportional ist.

Anmerk. Die Gleichung einer Parabel vom Parameter P ist

$$x^2 = 2\,Py \quad (\text{oder } \frac{x^2}{2\,P} = y)$$

welche durch parallele Verrückung des Coordinatenursprungs übergeht in

$$\frac{x^2}{2\,P} + \alpha x + \beta = y$$

woraus durch Vergleichung mit den Gleichungen 107) und 109) der Parameter P sich unmittelbar gleich $\frac{1}{q_1}$, beziehungsweise $\frac{1}{q_2}$ ergibt.

Wir bemerken ferner, dass nach Gleichung 18)

$$\mathfrak{V} = \frac{d\mathfrak{M}}{dx}$$

Es hat somit $\mathfrak{M}$ seinen grössten Werth für $\mathfrak{V} = 0$, d. h. der Scheitel der Parabel $\mathfrak{M}$ ist durch diejenige Abscisse gegeben, für welche $\mathfrak{V} = 0$ ist.

Diese Eigenschaften der Kurven $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ erleichtern das Auftragen derselben, wie schon mehrfach erwähnt ist; hier sei nur noch darauf hingewiesen, dass wir im vorliegenden Falle nur mit zweierlei Parabeln zu thun haben, deren Parameter den Werthen $\frac{1}{q}$ und $\frac{1}{p}$ proportional sind.

Gehen wir auf einzelne besondere Punkte über, so ergibt sich zunächst für die Vertikalkraft aus Gleichung 106) und 108) Folgendes.

Auf den Stützpunkten A und C ist die Vertikalkraft den Auflagerreaktionen gleich, bei dem Mittelpfeiler hat dieselbe zu beiden Seiten verschiedene Werthe, und zwar ist für die Oeffnung AB (deren Weite = a)

$$B_a = A - q_1 a$$

für die Oeffnung BC (deren Weite = b)

$$B_b = A + B - q_1 a$$

Da $q_1 a$ grösser als A, so ist B_a negativ, wogegen B_b wieder positiv ist; die Differenz beider, oder die Summe ihrer absoluten Werthe ist gleich dem Auflagerdruck B. — Die Punkte x_0 in denen die Vertikalkraft gleich Null wird, ergeben sich:

für die Spannweite AB nach Gleichung 106)

$$x_0 = \frac{A}{q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 110)$$

für die Spannweite BC nach Gleichung 108)

$$x_0 = a + \frac{A + B - q_1 a}{q_2} \quad \ldots \quad 111)$$

In gleicher Weise geben die Gleichungen 107) und 109) die besonderen Werthe des Moments $\mathfrak{M}$. — Durch vorstehende Gleichungen 110) und 111) sind die Abscissen für max M gegeben. Hiebei ist zu bemerken, dass wir für die Oeffnung AB in Gleichung 109) eine Abscisse $x_1 = x - a$ eingeführt haben. Für den Punkt $\mathfrak{B} = 0$ ist alsdann in Gleichung 109) für x_1 der aus Gleichung 111) gewonnene Werth $x_0 - a$ einzusetzen, nämlich

$$x_0 - a = \frac{A + B - q_1 a}{q_2}$$

Wenn wir die Maximalwerthe $\mathfrak{M}$ für die Oeffnungen AB und BC mit $\mathfrak{M}_a$ und $\mathfrak{M}_b$ bezeichnen, so finden wir durch Einsetzung der obigen Werthe x_0 (beziehungsweise $x_0 - a$)

für die Oeffnung AB nach Gleichung 107)

$$\max \mathfrak{M}_a = \tfrac{1}{2} \frac{A^2}{q_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 112)$$

$$\max \mathfrak{M}_b = Aa - \frac{q_1 a^2}{2} + \frac{(A + B - q_1 a)^2}{2\, q_2} = \tfrac{1}{2} \frac{C^2}{q_2} \quad . \quad 113)$$

Die Umformung der letzteren Gleichung kann mit Hülfe der Gleichungen 104^b) und 104^c) leicht bewerkstelligt werden.

Auf den Endauflagern A und C ist selbstverständlich $\mathfrak{M} = 0$; für den Mittelpfeiler erhalten wir aus Gleichung 107) und 109) denselben Werth:

$$\mathfrak{M}_B = Aa - \frac{q_1 a^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 114)$$

welcher Werth jedenfalls negativ ist, da $A < \frac{q_1 a}{2}$.

In den graphischen Darstellungen der Tafel IV. sind wie in Tafel II. die negativen Werthe der Grössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ umgeklappt und sind die absoluten Werthe von $\mathfrak{M}$ oberhalb, die absoluten Werthe von $\mathfrak{B}$ unterhalb der Abscissenaxe aufgetragen.

Zur näheren Erläuterung sind die Resultate der Rechnung in nachstehender Tabelle XX. eingetragen, wobei verschiedene Verhältnisse $\frac{p}{q}$ oder $\frac{p}{k}$ zu Grunde gelegt sind.

Die erste Horizontalcolonne entspricht der Maximalbelastung der ganzen Brücke (und wenn q = p gesetzt wird, auch der Belastung durch das Eigengewicht); für jedes Verhältniss $\frac{p}{q}$ und $\frac{p}{k}$ dient sodann die betreffende Horizontalcolonne zur Aufzeichnung der Kurven der einseitigen Belastung.

74. Wir gehen nun zu dem Falle über, dass die 3 Stützpunkte nicht in einer Ebene liegen und wenden wir hiezu die in N°. **21.** und **22.** entwickelte Methode des Ingenieur Clapeyron an. — Wir nehmen für beide Oeffnungen dieselbe Spannweite b

Tabelle XX. (für 2 Oeffnungen).

		Belastung von AB (mit q).								Belastung von BC (mit q).					
$\frac{p}{k}$	$\frac{p}{q}$	A	B	C	Vertikalkraft am Mittelpfeiler gegen AB.	Vertikalkraft am Mittelpfeiler gegen BC.	Abscisse $\mathfrak{V} = 0$.	max $\mathfrak{M}_a$	$\mathfrak{M}_B$ am Mittelpfeiler.	A	B	C	Abscisse $\mathfrak{V} = 0$.	max $\mathfrak{M}_b$	$\mathfrak{M}_B$
∞	1	qb 0,375	qb 1,25	qb 0,375	qb 0,625	qb 0,625	b 0,375	qb^2 0,070	qb^2 0,125	qb 0,375	qb 1,25	qb 0,375	b 0,375	qb^2 0,0703	qb^2 0,125
3	3/4	0,390	1,094	0,266	0,610	0,484	0,390	0,076	0,110	0,266	1,094	0,390	0,354	0,047	0,110
2	2/3	0,395	1,020	0,231	0,605	0,426	0,395	0,078	0,105	0,231	1,020	0,395	0,346	0,040	0,105
1	1/2	0,406	0,937	0,156	0,594	0,343	0,406	0,082	0,094	0,156	0,937	0,406	0,312	0,024	0,094
2/3	2/5	0,412	0,875	0,112	0,588	0,287	0,412	0,085	0,087	0,112	0,875	0,412	0,280	0,016	0,087
1/2	1/3	0,416	0,833	0,083	0,584	0,249	0,416	0,086	0,083	0,083	0,833	0,416	0,250	0,010	0,083
1/4	1/5	0,425	0,750	0,025	0,575	0,175	0,425	0,090	0,075	0,025	0,750	0 425	0,125	0,0015	0,075

an und setzen ausserdem voraus, dass die Endstützen gleich hoch, der Mittelstützpunkt B aber um die Höhe s gegen die Endstützen tiefer liege.

Wir werden dieses Beispiel benutzen, um die Vortheile, welche durch Senkung der Mittelstützen erreicht werden können, zu beleuchten, anderseits aber auch dazu, um den Einfluss zu untersuchen, den eine nicht beabsichtigte Senkung oder Hebung eines Stützpunkts hervorbringt.

Die Bezeichnungen seien dieselben wie in N°. **22**. Wenn man berücksichtigt, dass

$$\mu_1 = \nu_2 = 0$$

(da die Momente auf den Endstützen = 0 sind), ferner dass

$$\nu_1 = \mu_2 \text{ und } \psi_1 = \chi_2$$

so folgt:

Für die Oeffnung AB nach Gleichung 44)

$$\nu_1 = q_1 - \chi_1 + \varkappa_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$
$$\psi_1 = q_1 - 2\chi_1 + 3\varkappa_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

ferner gemäss Gleichung X. in N°. **22**.

$$\alpha = \frac{b^3}{24 E \Theta} \chi_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$
$$\alpha_, = \frac{b^3}{24 E \Theta} \psi_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV.}$$
$$\mathfrak{M}_1 = {}^2/_8 \, b^2 \, \nu_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{V.}$$
$$s = \varkappa_1 \frac{b^4}{24 E \Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{VI.}$$

und ebenso für die Oeffnung BC nach Gleichung 44)

$$o = q_2 - 2\nu_1 - \psi_1 + \varkappa_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{VII.}$$
$$\psi_2 = q_2 - 3\nu_1 - 2\psi_1 + 3\varkappa_2 \quad . \quad . \quad \text{VIII.}$$

und nach Gleichung X. der N°. **22**.

$$\alpha_{,,} = \frac{b^3}{24 E \Theta} \psi_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IX.}$$
$$- c = \varkappa_2 \frac{b^4}{24 E \Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{X.}$$

In obigen 10 Gleichungen haben wir 4 Unbekannte α $\alpha_,$ $\alpha_{,,}$ $\mathfrak{M}_1$, und 6 unbekannte Hilfsgrössen ν_1 χ_1 ψ_1 ψ_2 $\varkappa_1$ $\varkappa_2$, woraus jede dieser 10 Grössen gefunden werden kann.

Wir erhalten durch Elimination von χ_1 aus Gleichung I. oder II.

$$2\nu_1 - \psi_1 = q_1 - \varkappa_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XI.}$$

und durch Elimination von ψ_1 aus Gleichung XI. und VII.

$$\nu_1 = \frac{q_1 + q_2 + \varkappa_2 - \varkappa_1}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XII.}$$

Berücksichtigt man nun, dass nach Gleichung VI. und X.

$$x_1 = - x_2 \text{ ist,}$$

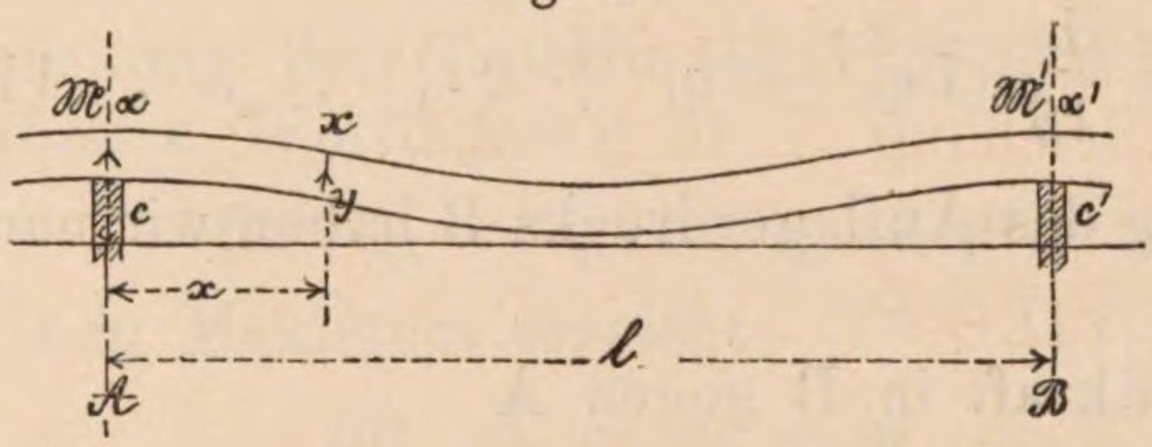
so folgt aus Gleichung XII. und V.

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{b^2}{16}(q_1 + q_2 - 2x_1) \quad . \quad . \quad . \quad 115)$$

worin nach Gleichung VI. $x_1 = \frac{24 \cdot s \cdot E\Theta}{b^4}$ zu nehmen ist; nachdem nunmehr $\mathfrak{M}_1$ bekannt ist, können die übrigen Unbekannten leicht gefunden werden.

Wenn für irgend eine Oeffnung die Momente $\mathfrak{M}$ über den Pfeilern bekannt sind, so geben die Gleichungen V. bis VI. der Nummer **21.** die Gestalt der neutralen Faser und damit die Einsenkung in der Mitte der Oeffnungen.

Fig. 20.



Bezeichnet in beistehender Fig. 20.:

α die Tangente des Winkels der elastischen Linie auf dem Stützpunkt A,

$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ die Angriffsmomente über den Pfeilern,

q die Belastung der betrachteten Oeffnung,

c, c' die Höhe der Stützpunkte über der Abscissenaxe;

l die Weite der Oeffnung,

so ist nach oben genannten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{ql^3}{24E\Theta} - \frac{l}{6E\Theta}(2\mathfrak{M} - \mathfrak{M}') + \frac{c' - c}{l} \\ y &= c + \alpha x + \frac{qx^4}{24E\Theta} - \left(\frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{l}\right)\frac{x^3}{6E\Theta} + \frac{\mathfrak{M}x^2}{2E\Theta} \end{aligned}\right\} 116)$$

Diese Gleichungen können ganz allgemein zur Berechnung der Einsenkung beliebiger Träger angewendet werden, indem man je nach Umständen die Grössen c, c', $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{M}'$ gleich Null setzt.

Anmerkung. Es muss berichtigend bemerkt werden, dass bei Erklärung der Bezeichnungen in No. **21.** und **22.** zwei Schreibfehler sich eingeschlichen haben; es soll nämlich heissen:

A u. B sind die Vertikalkräfte zunächst den Stützpunkten.

α α, $\alpha_{,,}$ . . sind die Tangenten der Winkel, welche die elastische Linie an den Stützpunkten mit dem Horizont bildet.

Um nun für jeden einzelnen Querschnitt $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ zu bestimmen, müssen die Auflagerdrücke gerechnet werden. Zu

diesem Zwecke bestimmt man die Vertikalkräfte zunächst den Auflagen nach Gleichung II. der N°. **21**. Es ist für die Oeffnung AB die Vertikalkraft zunächst dem Stützpunkte A

$$A_B = \frac{q_1 b}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{b}$$

und indem wir bemerken, dass $\mathfrak{M} = 0$ und dass die Vertikalkraft A_B gleich dem dortigen Endauflagerdruck ist, erhalten wir für letzteren

$$A = A_B = \frac{q_1 b}{2} - \frac{\mathfrak{M}_1}{b}$$

und durch Wertheinsetzung aus Gleichung 115.)

$$A = \frac{b}{16}(7 q_1 - q_2 + 2 x_1) \quad . \quad . \quad . \quad 117)$$

und ebenso für den Auflagerdruck in C

$$C = \frac{b}{16}(7 q_2 - q_1 + 2 x_1) \quad . \quad . \quad . \quad 117^a)$$

Zur Bestimmung des Auflagerdrucks B haben wir nach Gleichung II. in N°. **21**.

Vertikalkraft in B gegen A

$$B_A = \frac{q_2 b}{2} + \frac{\mathfrak{M}_1}{b} = \frac{b}{16}(9 q_1 + q_2 - 2 x_1)$$

Vertikalkraft in B gegen C

$$B_C = \frac{q_1 b}{2} + \frac{\mathfrak{M}_1}{b} = \frac{b}{16}(9 q_2 + q_1 - 2 x_1)$$

somit ist der Auflagerdruck in B

$$B = B_A + B_C = \frac{b}{16}(10 q_1 + 10 q_2 - 4 x_1) \quad 118)$$

Nachdem durch Gleichung 117)—118) die Auflagerdrücke gefunden sind, ergeben sich die einzelnen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ für jeden Querschnitt aus den früheren Gleichungen 106)—109) und kann nun wie in N°. **73**. mit Hilfe der Gleichungen 110)—114) eine Tabelle und graphische Darstellung angefertigt werden.

Wenn man in den Gleichungen 117)—118) die Grössen s und somit $x_1 = 0$ setzt, so müssen die genannten Gleichungen in die Gleichungen 105) übergehen, da dann sämmtliche Stützpunkte gleich hoch angenommen sind, d. h. die Senkung des Mittelstützpunktes aufgehoben ist; es kann diess als Probe für die Richtigkeit der Gleichungen 117)—118) betrachtet werden.

75. Den wichtigsten Einfluss übt die Senkung der Mittelstützen auf die Angriffsmomente $\mathfrak{M}$, welche aus den nunmehr bekannten Auflagerdrücken gefunden werden.

Durch Combination der Gleichungen 117) und 112) beziehungsweise 114) findet man (indem jetzt immer die Weite b beider Oeffnungen gleich gross angenommen wird) unter Beibehaltung der seitherigen Bezeichnungen:

grösstes Angriffsmoment, innerhalb der Oeffnungen

$$\max \mathfrak{M}_b = \frac{b^2}{512\, q_1} (7\, q_1 - q_2 + 2\, x_1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad 119)$$

In dieser Gleichung bezeichnet q_1 die Belastung der Oeffnung AB, q_2 die Belastung der Oeffnung BC; der Werth x_1 ist durch Gleichung VI. der Nr. **74**. gegeben.

Angriffsmoment auf dem Mittelpfeiler B

$$\mathfrak{M}_B = \frac{b^2}{16} (q_1 + q_2 - 2\, x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 120)$$

Die Anschauung der Gleichungen 119) und 120) zeigt, dass $\mathfrak{M}_b$ seinen grössten Werth hat

$$\text{für} \quad q_1 = q \qquad q_2 = p$$

während $\mathfrak{M}_B$ sein Maximum erreicht

$$\text{für} \quad q_1 = q_2 = q$$

und folgt hieraus:

$$M \max \mathfrak{M}_b = \frac{b^2}{512\, q} (7\, q - p + 2\, x_1)^2 \qquad 119^a)$$

$$\text{Max } \mathfrak{M}_B = \frac{b^2}{8} (q - x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 120^a)$$

Man sieht, dass M max $\mathfrak{M}_b$ zunimmt, je grösser x, d. h. je grösser die Senkung der Zwischenstützen ist, während Max $\mathfrak{M}_B$ gleichzeitig abnimmt.

Der Vortheil der Senkung der Zwischenstützen wird nun darin gesucht, dass man solche Werthe der Senkung s, beziehungsweise der Grösse x_1 aussucht, wonach die aus Gleichung 119^a) und 120^a) gefundenen Maximalwerthe einander gleich werden; es wird dadurch der kleinste Werth für das absolute Maximum von $\mathfrak{M}$ erhalten. — Indem man nun die Werthe

M max $\mathfrak{M}_b$ (nach Gleichung 119^a) und
Max $\mathfrak{M}_B$ (nach Gleichung 120^a)

einander gleichsetzt, erhält man

$$x_1 = \frac{q}{2} \left(\frac{p}{q} - 23 \pm \sqrt{544 - 32 \frac{p}{q}} \right) \qquad 121)$$

und indem man für x_1 seinen Werth aus N° **74**. Gl. VI. einsetzt:

günstigste Senkung der Mittelstütze B

$$s = \frac{b^4 q}{48 E \Theta}\left(\frac{p}{q} - 23 \pm \sqrt{544 - 32\frac{p}{q}}\right) \quad . \quad . \quad 122)$$

E ist der Elasticitätsmodul des fraglichen Materials, Θ das Trägheitsmoment des betrachteten Querschnittes.

Ist für einen bestimmten Träger x_1 nach Gleichung 121) berechnet, so finden sich die Auflagerdrücke und die wichtigsten Angriffsmomente nach den Gleichungen 117)—120). Insbesondere erhält man Max $\mathfrak{M}_B$ unmittelbar aus Gleichung 120[a]).

Wir haben auf diese Weise die nachstehende Tabelle XXI. für eine Reihe schmiedeiserner Brücken verschiedener Spannweite gebildet; die Verhältnisse $\frac{p}{q}$ sind der Tabelle XVII. entnommen (vergl. N°. **69**); hienach sind für die vortheilhafteste Senkung des Mittelstützpunktes der Werth Max $\mathfrak{M}_B$ und die Grösse der Senkung selbst bestimmt.

Letztere ist wesentlich vom Trägheitsmoment des Trägers abhängig. Wir stellten die Bedingung, dass die grösste Spannung $\mathfrak{A}$ der Gurtungen 600 Kilo per □ C. betragen solle.

Nun ist nach Gleichung 31) bei gleicher Stärke beider Gurtungen

$$\Theta = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{H}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I.$$

Indem wir nun ausserdem die Trägerhöhe H gleich $^1/_{10}$ der Spannweite b annehmen, erhält man durch Wertheinsetzung in Gleichung 122.)

$$s = \frac{q b^3}{7200 \text{ Max } \mathfrak{M}_B}\left(\frac{p}{q} - 23 \pm \sqrt{544 - 32\frac{p}{q}}\right) \quad . \quad II.$$

und sind die Werthe von s gleichfalls in Tabelle XXI. eingetragen.

76. Aus Tabelle XXI. ist insbesondere ersichtlich, wie kleine Senkungen hinreichen, um grosse Differenzen in den Angriffsmomenten hervorzurufen.

Die Senkung kann nicht allein dadurch hervorgerufen werden, dass man das mittlere Auflager tiefer herstellt, sondern insbesondere auch dadurch, dass man den Träger ebendaselbst überhöht; anderseits ist eine ungleiche Höhe der Auflager ohne Einfluss, sobald der Träger dem Längenprofil der Auflager sich anschliesst.

Selbstverständlich soll der Träger die verlangte Form haben, ehe er durch sein Eigengewicht eingebogen ist. Es muss daher entweder bei der Untersuchung zur Seite gelegt, oder auf genügend vielen. unverrückbaren Auflagern angearbeitet werden; (man kann auch die durch das Eigengewicht hervorgerufene Biegung berechnen und mit der wirklichen Krümmung vergleichen).

Tabelle XXI. (für 2 Oeffnungen).

	Spannweite	7 M.	10	15	20	30	40	60	100
	Verhältniss $\frac{p}{q}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5,3}$	$\frac{1}{4,5}$	$\frac{1}{3,6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2,5}$	$\frac{1}{1,9}$
Bei gleicher Höhenlage der Stützpunkte.	max $\mathfrak{M}_b$ inner den Oeffnungen.	qb^2 0,0927	0,0919	0,0906	0,0897	0,0882	0,0868	0,0851	0,0819
	max $\mathfrak{M}_b$ auf den Mittelpfeiler.	qb^2 0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
Vortheilhafteste Senkung des Mittelstützpunktes.	$\varkappa_1$	q 0,1792	0,1842	0,1913	0,1965	0,2050	0,2137	0,2239	0,2430
	Gleichzeitiges Max $\mathfrak{M}$ auf dem Mittelpfeiler und innerhalb der Oeffnungen.	qb^2 0,1026	0,1019	0,1011	0,1004	0,0994	0,0983	0,0970	0,0946
	Senkung des Mittelstützpunktes = s.	Cent. 0,340	0,502	0,753	1,087	1,718	2,483	3,848	7,523

Die Berechnung der in den continuirlichen Trägern thätigen Kräfte wird daher durch verhältnissmässig kleine Fehler wesentlich alterirt und gibt Tabelle XXI. ein Bild von den Aenderungen, die durch kleine Senkungsdifferenzen entstehen können.

Bei kleineren Spannweiten kann daher die Continuität der Träger nur mit grosser Vorsicht und mit Berücksichtigung vorstehend bezeichneter Eventualitäten angewendet werden; da zudem die Vortheile der Continuität hier weit geringer sind (vergl. auch Tabelle XX.) so wird man bei kleineren Weiten auf die Continuität ganz verzichten. — Bei grössern Spannweiten, wo die vortheilhafteste Senkung der Zwischenstützen immer mehrere Centimeter beträgt, wird man bei sorgfältiger Ausführung die beabsichtigte Gestalt der Gurtungen mit hinreichender Sicherheit herstellen können; die Senkung der Zwischenstützen hat dann insbesondere den Vortheil, dass man die Trägerstärke gleichmässiger herstellen kann und damit den Voraussetzungen, welche bei Berechnung der elastischen Linie gemacht werden, nachkommt.

Jede Senkung der Zwischenstützen, sei sie nun absichtlich oder durch einen Fehler entstanden, kann insofern sie genau erhoben ist, durch vorstehende Formeln berücksichtigt werden; man berechnet zunächst x_1 nach Gleichung VI. der N°. **74** und findet dann die Auflagerdrücke und eine Reihe von Angriffsmomenten unmittelbar nach den Gleichungen 117)—120).

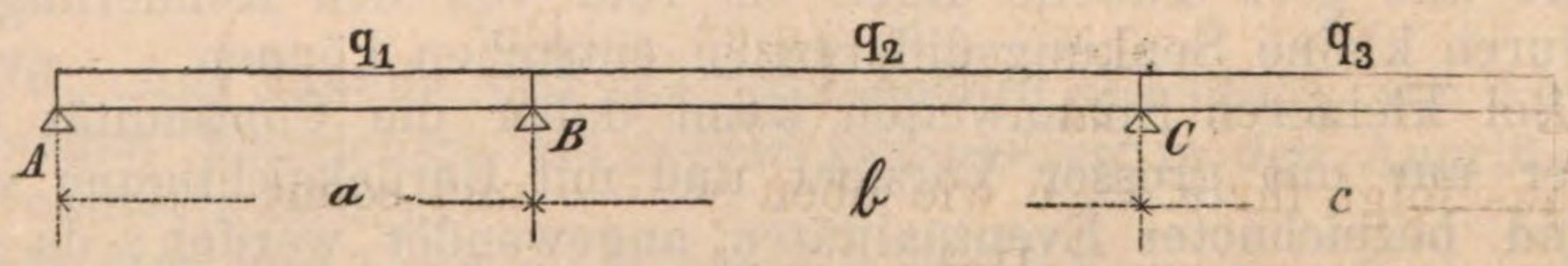
Unabsichtliche Differenzen in der Höhenlage können insbesondere auch in der Weise eintreten, dass die Zwischenstützen höher zu liegen kommen, als die Endstützen; das ohnedem grosse Angriffsmoment auf den Zwischenstützen wird dann weiterhin vermehrt. — Es ist dies wie oben bemerkt ein wesentlicher Grund gegen die Continuität der kleineren Brücken, indem bei letzteren der Einfluss eines kleinen Fehlers in der Höhenlage sehr bedeutend wird.

77. Auch bei drei Oeffnungen werden wir als ungünstigste Belastungen wieder diejenigen annehmen dürfen, bei denen immer eine oder mehrere Oeffnungen auf ihre ganze Länge durch die zufällige Last k gleichmässig belastet sind. Wir ziehen desshalb folgende Belastungsarten in den Kreis unserer Betrachtung:

1) Belastung sämmtlicher drei Oeffnungen mit der Gesammtlast $q = p + k$.
2) Belastung der Mittelöffnung BC, Entlastung der Aussenöffnungen.
3) Belastung einer Aussenöffnung.
4) Belastung einer Aussenöffnung zugleich mit der Mittelöffnung.
5) Belastung beider Aussenöffnungen.

Wir nehmen vorerst an, dass sämmtliche 4 Auflagerpunkte in gleicher Höhe liegen, es seien aber der Allgemeinheit halber die 3 Oeffnungen verschieden weit, so dass AB = a, BC = b, CD = c und der Reihe nach mit q_1 q_2 und q_3 belastet, wie aus beistehender Fig. 70. ersichtlich ist.

Fig. 70.



Indem wir ebenso, wie in N°. **71.** für 2 Oeffnungen geschehen, für jede der 3 Oeffnungen die Gleichung 41) anschreiben und zweimal integriren, und ausserdem die beiden Bedingungen des Gleichgewichts für die äusseren Kräfte anschreiben, so erhalten wir die Bedingungsgleichungen, welche zur Auffindung der Auflagerdrücke nothwendig sind.

1) Stück AB, Coordinatenursprung in B.

$$\varepsilon \quad \frac{d^2y}{dx^2} = Ax - \frac{qx^2}{2}$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \frac{Ax^2}{2} - \frac{q_1 x^3}{6} + \text{Const.} = \frac{Ax^2}{2} - \frac{q_1 x^3}{6} + \varepsilon tg\varphi - \frac{Aa^2}{2} + \frac{q_1 a^3}{6}$$

wenn φ den Tangenten-Winkel in B bezeichnet. —

$$\varepsilon \,.\, y = \frac{Ax^3}{6} - \frac{q_1 x^4}{24} + x\left(\varepsilon tg\varphi - \frac{Aa^2}{2} + \frac{q_1 a^3}{6}\right)$$

woraus für $x = a$, $y = o$ und somit

$$\varepsilon tg\varphi = \frac{Aa^3}{3} - \frac{q_1 a^3}{8} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{I.}$$

2) Stück BC, Coordinatenursprung in B,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = A\,(a + x) + Bx - q_1 a\left(\frac{a}{2} + x\right) - \frac{q_2 x^2}{2}$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = Aax + \frac{Ax^2}{2} + \frac{Bx^2}{2} - \frac{q_1 a^2 x}{2} - \frac{q_1 a x^2}{2} - \frac{q_2 x^3}{6} + \varepsilon tg\varphi$$

$$\varepsilon \,.\, y = Aax^2 + \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^3}{6} - \frac{q_1 a^2 x^2}{4} - \frac{q_1 a x^3}{6} - \frac{q_2 x^4}{24} + \varepsilon tg\varphi \,.\, x.$$

für $x = b$ ist $\frac{dy}{dx} = tg\varphi$, zu setzen, wenn φ, den Winkel in C bezeichnet

$$\varepsilon \,.\, tg\varphi, = Aab + \frac{Ab^2}{2} + \frac{Bb^2}{2} - \frac{q_1 a^2 b}{2} - \frac{q_1 a b^2}{2} - \frac{q_2 b^3}{6} + \varepsilon tg\varphi \quad \text{II.}$$

ferner ist für $x = b$, $y = o$ und somit

$$o = \frac{Aab}{2} + \frac{Ab^2}{6} + \frac{Bb^2}{6} - \frac{q_1 a^2 b}{4} - \frac{q_1 a b^2}{6} - \frac{q_2 b^3}{24} + \varepsilon tg\varphi \quad . \quad \text{III.}$$

3) für das Stück CD, Coordinatenursprung in D,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = Dx - \frac{q_3 x^2}{2}$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = Dx^2 - \frac{q_3 x^3}{6} - \varepsilon tg\varphi, - \frac{Dc^2}{2} + \frac{q_3 c^3}{6}$$

$$\varepsilon \,.\, y = \frac{Dx^3}{6} - \frac{q_3 x^4}{24} + x\left(\frac{q_3 c^3}{6} - \frac{Dc^2}{2} - \varepsilon tg\varphi,\right)$$

hieraus folgt für $x = c$ wie oben $y = o$ und somit

$$-(\varepsilon tg\varphi,) = \frac{Dc^2}{3} - \frac{q_3 c^3}{8} \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{IV.}$$

Ausser den Gleichungen I bis IV haben wir noch die Bedingungen des Gleichgewichts für sämmtliche äussere Kräfte, nämlich

$$A + B + C + D = q_1 a + q_2 b + q_3 c \quad . \; . \quad \text{V.}$$

und endlich Gleichung 4)

$$o = A\,(a + b) + Bb - Dc - q_1 a\left(b + \frac{a}{2}\right) - \frac{q_2 b^2}{2} + \frac{q_3 c^2}{2} \quad . \; . \; . \quad \text{VI.}$$

Diese 6 Gleichungen genügen zur Bestimmung unserer 6 Unbekannten A, B, C, D, $\varepsilon tg\varphi$ und $\varepsilon tg\varphi_1$. Wir finden

$$A = \frac{q_1 (8a^2bc + 6a^2b^2 + 6a^3b + 6a^3c) - q_2 b^3 (2c + b) + q_3 c^3 b}{16abc + 16a^2c + 12ab^2 + 16a^2b} \quad 123^a)$$

$$A = \frac{6q_1 a^2 b + 4q_1 ab^2 + q_2 b^3 + 3q_1 a^3 - A(12ab + 4b^2 + 8a^2)}{4b^2} \quad 123^b)$$

$$C = q_1 a + q_2 b + q_3 c - (A + B + D) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 123^c)$$

$$D = \frac{A\ (a + b) + Bb - q_1 a\ (b + \frac{a}{2}) - \frac{q_2 b^2}{2} + \frac{q_3 c^2}{2}}{c} \quad 123^d)$$

Für symmetrische Belastungen, wo $A = D$ und $B = C$ ist, vereinfachen sich diese Formeln folgendermaassen:

$$A = \frac{q_1\ (3a^3 + 6a^2 b) - q_2 b^3}{8a^2 + 12ab} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 124^a)$$

$$B = \frac{2aq_1 + bq_2}{2}\ A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 124^b)$$

Indem man in den Gleichungen 123) und 124) für die Werthe q_1 q_2 und q_3 die in den Oeffnungen AB, BC und CD wirkenden Belastungen einsetzt, welche nach der obigen Betrachtung entweder dem Eigengewicht p oder der Gesammtbelastung q entsprechen, so finden sich die Auflagerdrücke für die ungünstigsten Belastungsarten.

Diese Gleichungen 123) und 124) sind aber auch anwendbar, wenn p oder q für die einzelnen Spannweiten verschiedene Werthe hat.

78. Wenn die Auflagerdrücke A, B, C u. D nach den Gleichungen 123) oder 124) gefunden sind, so dienen die Gleichungen N°. 106)—109) zur Bestimmung der Grössen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$, indem in diesen Formeln die dritte Oeffnung durch Aenderung des Cordinatensystems durch die erste Oeffnung ersetzt werden kann.

Ebenso sind die Betrachtungen in N°. **73.** auch hier vollständig zutreffend (indem man immer die 3. Oeffnung als 1. Oeffnung betrachtet); insbesondere gelten die Gleichungen 112)—114) welche zunächst nur für 2 Oeffnungen angeschrieben wurden, durchaus auch für 3 Oeffnungen, nachdem man die aus Gleichung 123) und 124) bestimmten Auflagerdrücke A, B, C und D eingesetzt hat. — Das Moment max $\mathfrak{M}_a$ in der Oeffnung AB erhält seinen grössten Werth, wenn beide Aussenöffnungen belastet sind (weil in diesem Falle A seinen grössten Werth hat) und findet man wenn $a = c$ (was im Folgenden durchweg angenommen werden soll) für dieses Maximum

$$\text{Max } \mathfrak{M}_a = \frac{A^2}{2q} = \frac{1}{2q} \left[\frac{qa^2\ (3a + 6b) - pb^3}{8a^2 + 12ab}\right]^2 \quad 125)$$

Die Abscisse dieses Moments Max $\mathfrak{M}_a$ ist durch Gleichung 110) gegeben.

Das grösste Angriffsmoment innerhalb der Mittelöffnung findet dann Statt, wenn nur letztere belastet und die Aussenöffnungen blos mit dem Eigengewicht behaftet sind (Fall 2. in N°. **77.**); wenn man die entsprechenden Auflagerdrücke in Gleichung 113) einführt, so erhält man als grösstes Angriffsmoment in der Mittelöffnung (und zwar stets in der Mitte der Oeffnung)

$$\text{Max } \mathfrak{M}_b = \frac{qb^2\,(2a + b) - 2pa^3}{16a + 24b} \quad \ldots \quad 126)$$

Ebenso zeigen die Gleichungen 114), 123^a) und 123^b) dass das Moment über der Mittelstütze dann am grössten ist, wenn die anstossende Aussenöffnung und die Mittelöffnung mit q belastet sind (Fall 4); man erhält als grösstes Angriffsmoment über dem Mittelpfeiler B

$$\text{Max } \mathfrak{M}_B = \frac{q\,(2a^3b + 2a^4 + 2ab^3 + b^4) - pa^3b}{32ab + 16a^2 + 12b^2} \quad 127)$$

Wir haben im Vorstehenden für die Fälle 2, 4 und 5 der N°. **77.** die grössten Werthe der Momente berechnet (immer unter der Annahme, dass beide Seitenöffnungen gleiche Weite haben) und überzeugt man sich leicht, dass die Fälle 1 und 3 keine grösseren Werthe geben. Für Fall 3 folgt dies direkt aus der Gleichung für den Auflagerdruck A, der um so kleiner wird, je kleiner q_3. Wir können desshalb diesen Fall, als in den andern enthalten ganz beiseite lassen und bei Herstellung einer graphischen Darstellung, uns blos an die übrigen 4 Fälle halten.

Aber auch von den so entstehenden 4 Kurven gibt Fall 1) nirgends einen Maximalwerth, wie schon daraus geschlossen werden kann, dass hiefür weder in der Mitte der Oeffnung noch über den Pfeilern ein Maximalwerth stattfindet (vergl. Gl. 125)—127).

Die zum Auftragen erforderlichen übrigen Werthe von $\mathfrak{M}$ können wie schon bemerkt, nach Gleichung 107) und 109) insbesondere aber auch nach Gleichung 112)—114) berechnet werden.

79. Wir haben für ein Beispiel in Beziehung auf das Verhältniss $\frac{a}{b}$ eine Wahl zu treffen. Herr Ing. Mohr hat in einer speziell die continuirlichen Träger behandelnden Ausarbeitung (hannoverische Bauzeitung, Jahrgang 1860) das Verhältniss $\frac{a}{b}$ in der Weise bestimmt, dass das auf dem Zwischenpfeiler wirkende grösste $\mathfrak{M}$, welches stets das absolute Maximum sämmtlicher $\mathfrak{M}$ ist, seinen kleinsten Werth erhalte; es ergibt sich die Bedingung, dass $a > b$ sein müsste, d. h. die Aussenweiten wären etwa $\frac{10}{9}$

der Mittelweite zu nehmen. Dieses Resultat hat offenbar blos theoretischen Werth und wird man schon aus ästhetischen Rücksichten, ein solches Verhältniss nicht wohl annehmen können; auch könnte man durch Senkung der Zwischenstützen das Moment über dem Mittelpfeiler in wirksamerer Weise vermindern, falls hierauf das grösste Gewicht gelegt werden will.

Wir stellen uns die Aufgabe, das Verhältniss $\frac{a}{b}$ so zu richten, dass der Winkel, den die neutrale Axe mit der Horizontalen bildet, auf dem Mittelpfeiler für den Fall der gleichförmig vertheilten Maximalbelastung gleich Null wird.

Es wird hiedurch nicht nur erreicht, dass auch bei einseitigen Belastungen die Tangentenwinkel auf dem Pfeiler möglichst klein werden (somit eine einseitige Pfeilerbelastung thunlich vermieden wird) sondern es scheint uns überhaupt ein constructiver Vortheil darin zu liegen, dass bei der gewählten Anordnung die Vertikalkräfte und Angriffsmomente sich ziemlich symmetrisch um die Zwischenpfeiler gruppiren.

Zur Auffindung des Verhältnisses $\frac{a}{b}$. hat man in Gleichung I) der N°. **77.** $tg\varphi = o$ zu setzen, so dass indem $q_1 = q_2 = q_3$

$$o = \frac{Aa^2}{3} - \frac{qa^3}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I)}$$

sodann ist für diese Belastung nach Gleichung 124[a])

$$A = q\,\frac{(3a^3 + 6a^2b - b^3)}{8a^2 + 12ab} \quad \ldots\ldots\ldots \text{II)}$$

woraus folgt:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1{,}5} = 1{,}225 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{III)}$$

$\frac{a}{b}$ fällt somit zwischen $^4/_5$ und $^5/_6$ und nehmen wir für das folgende Beispiel $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

Nachdem wir für die in N°. **76.** aufgeführten Fälle 1, 2, 4 und 5 die Auflagerdrücke nach den Gleichungen 123) bez. 124) bestimmt hatten, berechneten sich die einzelnen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ nach den Gleichungen 106)—109) und 112)—114); und sind die Resultate dieser Rechnung in der folgenden Tabelle XXII. gegeben. Indem wir endlich die $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ als Ordinate der betreffenden Abscissen auftragen, erhalten wir die graphischen Darstellungen der Tafel V., die am Schlusse des Buches sich findet.

Tabelle XXII. $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

$\frac{p}{k}$	$\frac{p}{q}$	A	B	max $\mathfrak{M}$ für AB	$\mathfrak{M}$ für B	max $\mathfrak{M}$ für BC	Abscisse $\mathfrak{V} = o$ für AB	für BC
I. Belastung der Mittelöffnung.								
∞	1	bq 0,297	bq 1,003	qb^2 0,044	qb^2 0,0824	qb^2 0,0430	b 0,297	b 0,5
2	2/3	0,175	0,858	0,0229	0,0728	0,0520	0,262	0,5
1	1/2	0,114	0,785	0,013	0,0688	0,0566	0,220	0,5
2/3	2/5	0,078	0,742	0,0076	0,0656	0,0594	0,195	0,5
1/2	1/3	0,054	0,713	0,00435	0,0635	0,0613	0,162	0,5
1/4	1/5	0,005	0,655	0,00006	0,06	0,0650	0,025	0,5
1/8	1/9	— 0,027	0,617	0,0033	0,0578	0,0675	—0,243	0,5
III. Belastung beider Aussenöffnungen.								
∞	1	bq 0,297	bq 1,003	qb^2 0,0440	qb^2 0,0824	qb^2 0,0430	b 0,297	b 0,5
2	2/3	0,32	0,814	0,0512	0,0680	0,0191	0,32	0,5
1	1/2	0,331	0,719	0,0547	0,0550	0,0073	0,331	0,5
2/3	2/5	0,338	0,662	0,0571	0,0496	0,0000	0,338	0,5
1/2	1/3	0,342	0,624	0,0584	0,0464	—0,0045	0,342	0,5
1/4	1/5	0,351	0,549	0,0612	0,0400	—0,0139	0,351	0,5
1/8	1/9	0,357	0,498	0,0637	0,0340	—0,0200	0,357	0,5

Fortsetzung von Tabelle XXII. $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

$\frac{p'}{k}$	$\frac{p}{q}$	A	B	max $\mathfrak{M}$ für AB	$\mathfrak{M}$ für B	max $\mathfrak{M}$ für BC	Abscisse $\mathfrak{V} = o$ für AB	Abscisse $\mathfrak{V} = o$ fürBC
II. Belastung der Mittelöffnung und einer Aussenöffnung (AB).								
		bq	bq	qb^2	qb^2	qb^2	b	b
∞	1	0,297	1,003	0,044	0,0824	0,0430	0,297	0,5
2	$\frac{2}{3}$	0,2928	1,0238	0,0429	0,0858	0,0482	0,293	0,517
1	$\frac{1}{2}$	0,2906	1,0342	0,0423	0,0875	0,0507	0,291	0,525
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	0,2893	1,0405	0,0418	0,0886	0,0520	0,289	0,53
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0,2883	1,0446	0,0415	0,0893	0,0529	0,288	0,533
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	0,2866	1,0530	0,0412	0,0907	0,0554	0,287	0,54
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	0,2854	1,0586	0,0411	0,0917	0,0562	0,285	0,544

80. Aus den graphischen Darstellungen der Tafel V. ist ersichtlich, wie die in Gleichung 125)—127) berechneten Momente für die Oeffnungen, beziehungsweise Mittelpfeiler die grössten Werthe darstellen. Um die Verhältnisse $\frac{a}{b}$ zu vergleichen, berechnen wir diese 3 Maximalwerthe für verschiedene Anordnungen, indem wir das Verhältniss $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$ zu Grunde legen. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle XXIII. zusammengestellt.

Um aber diese Werthe richtig, mit einander vergleichen zu können, muss man sie auf eine gleiche Gesammtweite L sämmtlicher Oeffnungen reduciren. Wir haben $L = 2a + b$, woraus

$$b = \frac{L}{2\,\frac{a}{b} + 1}$$

Nimmt man als Maassstab eine gleiche Weite sämmtlicher Oeffnungen, so dass $l = \frac{L}{3}$, so ist

Tabelle XXIII.

Maximalwerthe für 3 Oeffnungen. $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$

Verhältniss $\frac{a}{b}$ =	1/2	3/4	4/5	5/6	7/8	9/10	1
Mmax $\mathfrak{M}$ in BC	qb^2 0,0595	qb^2 0,0613	qb^2 0,0612	qb^2 0,0610	qb^2 0,0606	qb^2 0,0593	qb^2 0,0584
Mmax $\mathfrak{M}$ in B	0,0729	0,0852	0,0893	0,0922	0,0963	0,0991	0,1111
Mmax $\mathfrak{M}$ in AB	0,0146	0,0509	0,0584	0,0641	0,0711	0,0745	0,0937

$$b = \frac{31}{2\,\frac{a}{b} + 1}$$

und um unsere in Function von b ausgedrückten Werthe nunmehr in Function von l auszudrücken, müssen wir sämmtliche Werthe der Tafel mit $\left(\frac{3}{2\,\frac{a}{b} + 1}\right)^2$ multipliciren.

Hiedurch erhält man folgende Zusammenstellung:

Tabelle XXIV. $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$

$\frac{a}{b}$	1/2	3/4	4/5	5/6	7/8	9/10	1
Mmax $\mathfrak{M}$ in BC	ql^2 0,1338	ql^2 0,0883	ql^2 0,0814	ql^2 0,0769	ql^2 0,0721	ql^2 0,0679	ql^2 0,0584
Mmax $\mathfrak{M}$ in B	0,1640	0,1231	0,1188	0,1172	0,1146	0,1134	0,1111
Mmax $\mathfrak{M}$ in AB	0,0328	0,0733	0,0777	0,0808	0,0845	0,0858	0,0937

Aus der letztern Tabelle folgern wir, dass das Verhältniss $\frac{a}{b} = 1$ die günstigsten Momente gibt; dass dagegen die Verhältnisse 4/5 — 5/6 der geringsten Differenzen in den Momentenwerthen zeigen. — Im Allgemeinen stehen sich nach dieser Anschauung die einzelnen Verhältnisse bezüglich des Materialverbrauchs ziemlich nahe und werden andere Rücksichten die Wahl der Spann-

weiten entscheiden; wir haben schon in N°. **79**. entwickelt, warum wir, insolange nicht andere Bedingungen die Eintheilung vorschreiben, das Verhältniss $\frac{a}{b} = \frac{1}{1{,}225}$ vorziehen.

Zur Beurtheilung der grössten Angriffsmomente bestehender Brücken von beliebiger Spannweite und verschiedenen Verhältnissen der Oeffnungen dient nachstehende Tabelle XXV., auf welche wir auch bei Beurtheilung des Einflusses der Continuität zurückkommen werden.

Tabelle XXV.

Werthe von Max $\mathfrak{M}_B$ für 3 Oeffnungen.

$\frac{a}{b} =$	1/2	3/4	4/5	5/6	7/8	9/10	1
$\frac{p}{q} = 1$	qb^2 0,0703	qb^2 0,0789	qb^2 0,0824	qb^2 0,0845	qb^2 0,0879	qb^2 0,0900	qb^2 0,1000
3/4	0,0713	0,0813	0,0848	0,0874	0,0911	0,0934	0,1042
2/3	0,0716	0,0821	0,0858	0,0882	0,0921	0,0946	0,1055
1/2	0,0723	0,0836	0,0875	0,0903	0,0943	0,0968	0,1083
2/5	0,0725	0,0846	0,0886	0,0915	0,0956	0,0981	0,1100
1/3	0,0729	0,0855	0,0893	0,0922	0,0964	0,0991	0,1111
1/4	0,0732	0,0860	0,0902	0,0932	0,0974	0,1002	0,1125
1/5	0,0734	0,0865	0,0907	0,0938	0,0981	0,1009	0,1133
1/7	0,0737	0,0870	0,0914	0,0945	0,0988	0,1017	0,1143
1/9	0,0738	0,0873	0,0917	0,0948	0,0993	0,1021	0,1148

81. Wir gehen nun auf den Fall über, dass die Stützpunkte nicht in gleicher Höhe liegen. Wir nehmen an, der Träger sei symmetrisch unterstützt, somit $a = c$, ferner sei die Senkung s der beiden Mittelstützen gleich gross. Wie bei zwei Oeffnungen ge-

schehen, wird die Methode von Clapeyron angewendet. Man hat zunächst für jede Oeffnung die Gleichung 44) und die Hülfsgleichungen X der N°. **22.** anzuschreiben, sodann in soweit zu eliminiren, dass ausser den Momenten $\mathfrak{M}$ nur die Senkung s der Zwischenstützen zurückbleibt; letztere ist in der Hülfsgrösse $\varkappa_1$ enthalten, wofür obige Gleichung X ergibt:

$$s = c_, - c = \varkappa_1 \frac{\alpha^4}{24 E \Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 128)$$

Durch Elimination der übrigen Hülfsgrössen erhält man:

Moment auf dem Auflager B

$$\mathfrak{M}_B = \frac{q_1(2a^3b + 2a^4) + q_2(b^4 + 2ab^3) - q_3 a^3 b - \varkappa_1 (a^3 b + 2a^4)}{32ab + 12b^2 + 16a^2} \quad 129)$$

und das Moment auf dem Auflager C

$$\mathfrak{M}_C = \frac{q_3 (2a^3b + 2a^4) + q_2 (b^4 + 2ab^3) - q_1 a^3 b - \varkappa_1 (a^3 b + 2a^4)}{32ab + 12b^2 + 16a^2} \quad 130)$$

Aus Gleichung 129) und 130) finden sich die Auflagerdrücke in A und B nach Gleichung I) und II) der N°. **21.**

$$A = \frac{\begin{array}{r} q_1 (14a^3b + 6a^2b^2 + 6a^4) - q_2 (b^4 + 2ab^3) + q_3 a^3 b \\ + \varkappa_1 (a^3 b + 2a^4) \end{array}}{32a^2b + 12ab^2 + 16a^3} \quad 131)$$

ferner die Vertikalkraft am Pfeiler B links desselben

$$B_a = \frac{\begin{array}{r} q_1 (18a^3b^2 + 6a^2b^3 + 10a^4b) + q_2 (b^5 + 2ab^4) - q_3 a^2 b^2 \\ - \varkappa_1 (a^3 b^2 + 2a^4 b) \end{array}}{32a^2b^2 + 12ab^2 + 16a^3 b}$$

und die Vertikalkraft am Pfeiler B rechts desselben

$$B_b = \frac{\begin{array}{r} q_1 (3a^4b + 2a^5) - q_3 (3a^4b + 2a^5) + q_2 (16a^2b^3 + 6ab^4 \\ + 8a^3 b^2) \end{array}}{32a^2b^2 + 12ab^3 + 16a^3 b}$$

somit der Auflagerdruck $B = B_a + B_b$

$$B = \frac{\begin{array}{r} q_1 (2a^5 + 13a^4b + 18a^3b^2 + 6a^2b^3) + q_2 (8a^3b^2 + 16a^2b^3 \\ + 8ab^4 + b^5) - q_3 (2a^5 + 3a^4b + a^3b^2) - \varkappa_1 (a^3b^2 + 2a^4b) \end{array}}{32a^2b^2 + 12ab^3 + 16a^3b} \quad 132)$$

die Auflagerdrücke C und D erhält man, wenn man in den Werthen von A und B das Gewicht q_1 mit q_3 vertauscht.

Anmerk. Zum bessern Verständniss werden im Folgenden die zu obigen Resultaten führenden Gleichungen beigesetzt:

Es ist nach Gleichung 44) für die erste Oeffnung, da $\mathfrak{M} = 0$

$$\nu_1 = q_1 - \chi_1 + \varkappa_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I.$$

$$\psi_1 = q_1 - 2\chi_1 + 3\varkappa_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad II.$$

für die zweite Oeffnung, da $c_{,,} = c_{,}$ somit $k_2 = 0$

$$\nu_2 = q_2 - 2\mu_2 - \chi_2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{III.}$$

$$\psi_2 = q_2 - 3\mu_2 - 2\chi_2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{IV.}$$

für die dritte Oeffnung, da $\mathfrak{M}_{,,,} = 0$

$$o = q_3 - 2\mu_3 - \chi_3 + \varkappa_3 \quad \ldots\ldots\ldots \text{V.}$$

und sodann nach Gleichung X. der N°. **22.** die Hülfsgleichungen

$$\alpha_1 = \frac{a^3}{24 E\Theta}\psi_1 = \frac{b^3}{24 E\Theta}\chi^2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{VI.}$$

$$\mathfrak{M}_1 = {}^2/_8\, a^2\nu_1 = {}^2/_8 b^2\mu_2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{VII.}$$

$$s = \varkappa_1 \frac{a^4}{24E\Theta} = -\varkappa_3 \frac{a^4}{24E\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \text{VIII.}$$

$$\alpha_{,,} = \frac{b^3}{24E\Theta}\psi_2 = \frac{a^3}{24E\Theta}\chi_3 \quad \ldots\ldots\ldots \text{IX.}$$

$$\mathfrak{M}'' = {}^2/_8 b^2\nu_2 = {}^2/_8 a^2\mu_3 \quad \ldots\ldots\ldots \text{X.}$$

aus welchen Gleichungen die 10 Unbekannten $\nu_1\ \chi_1\ \psi_1\ \nu_2\ \mu_2\ \psi_2\ \chi_2\ \mu_3\ \chi_3$ u. $\varkappa_1$ gefunden werden können; die zur Auffindung der Momente $\mathfrak{M}$ nicht erforderlichen Gleichungen sind im Obigen schon weggelassen.

Nachdem die Auflagerdrücke gefunden sind, wird die Gestalt der neutralen Faser und damit die Einsenkung in der Mitte der Oeffnungen wie in N°. **75.** nach Gleichung 116) gefunden, indem Fig. 20) auch hier benützt wird.

Mittelst der Auflagerdrücke werden aber hauptsächlich die sämmtlichen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ berechnet; es dienen hiezu wieder die Gleichungen 106)—109) sowie 112)—114); hienach kann sodann eine graphische Darstellung ähnlich der in Tafel V. gegebenen hergestellt werden, was bei Berechnung eines bestimmten Beispiels nie versäumt werden sollte, da diese graphische Darstellung bei den etwas complicirten Berechnungen als Controlle dient und ein klareres Bild gibt, als blosse Formeln oder die Werthe einzelner Momente.

Aus Gleichung 130) überzeugt man sich, dass gerade wie bei horizontaler Stützlage das Moment $\mathfrak{M}_B$ dann am grössten ist, wenn q_1 und q_2 den grössten Werth q, und q_3 seinen kleinsten Werth p hat und ist für diesen Fall

$$\text{Max}\,\mathfrak{M}_B = \frac{q(2a^3b + 2a^4 + b^4 + 2ab^3) - pa^3b - \varkappa_1(a^3b + 2a^4)}{32ab + 12b^2 + 16a^2} \quad 133)$$

durch die Senkung der Stütze B wird das Moment verringert und geht in den Werth der Gleichung 124) über, wenn $\varkappa_1 = o$ gesetzt wird.

Ganz ebenso wie im Falle der horizontalen Lage sämmtlicher Stützen lässt sich nachweisen, dass das grösste Moment in AB dann am grössten ist, wenn beide Aussenöffnungen, das Moment in BC dann, wenn eine Aussenöffnung und die Mittelöffnung belastet sind.

Man erhält für diese beiderlei Fälle

Grösstes Angriffsmoment in AB

$$\text{Mmax } \mathfrak{M}_a = \frac{A^2}{2q_1} = \frac{1}{2q}\left[\frac{qa^2(3a+6b) - pb^3 + \varkappa_1 a^3}{8a^2 + 12ab}\right]^2 \quad . \; . \; 134)$$

Grösstes Moment in BC

$$\text{Mmax } \mathfrak{M}_b = \frac{qb^2\,(2a+b) - 2pa^3 + 2\varkappa_1 a^3}{16a + 24b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 135)$$

Diese beiden Maximalmomente nehmen mit der Senkung der Stützpunkte zu und gehen in den Werth der Gleichung 125) und 126) über, wenn man $\varkappa_1 = o$ setzt. Den grössten Vortheil der Senkung der Stützpunkte hat man dann, wenn man das Verhältniss der Spannweiten a : b und die Senkung so wählt, dass die durch die Gleichungen 133)—135) bestimmten 3 Maximalwerthe einander gleich werden. — Herr Ingenieur Mohr hat hiefür die empirische Formel berechnet

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{1{,}13} + \frac{1}{25}\,\frac{p}{q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 136)$$

bei Annahme dieses Verhältnisses kann man durch Combination vorstehender Gleichungen 133) und 135) denjenigen Werth der Grösse $\varkappa_1$ finden, für welchen die günstigste Senkung der Mittelstützen eintritt. Diese Senkung selbst findet sich dann nach Gleichung 128.)

Wenn ein anderes Verhältniss der Spannweiten besteht, so muss man sich auf diejenige Senkung der Mittelstützen beschränken, durch welche die beiden grössten der 3 Maximalmomente einander gleich werden; ist $\frac{a}{b} > \left(\frac{1}{1{,}13} + \frac{1}{25}\,\frac{p}{q}\right)$, so ist Mmax $\mathfrak{M}_a >$ Mmax $\mathfrak{M}_b$, und es wird dann durch Combination der Gleichungen 133) und 134) die Bedingungsgleichung für $\varkappa_1$ erhalten:

Max $\mathfrak{M}_B$ = Mmax $\mathfrak{M}_a$ oder

$$(2a+b)\,[qa^2\,(3a+6b) - pb^3 + \varkappa_1 a^3]^2 = 8a^2q\,(2a+3b) \quad 137)$$
$$[q\,(2a^3b + 2a^4 + b^4 + 2ab^3) - pa^3b - \varkappa_1\,(a^3b + 2a^4)]$$

Ist $\frac{a}{b} < \left(\frac{1}{1{,}13} + \frac{1}{25}\,\frac{p}{q}\right)$, so ist Mmax $\mathfrak{M}_b >$ Mmax $\mathfrak{M}_a$ und es wird durch Combination der Gleichungen 133) und 135) die Bedingung erhalten:

Max $\mathfrak{M}_B$ = Mmax $\mathfrak{M}_b$ oder

$$\varkappa_1 = \frac{4qa^4 + 4pa^4 + 4qa^3b - 4qa^2b^2 + qb^4}{4\,(2a^4 + ba^3)} \quad . \; . \; 138)$$

82. In der folgenden Tabelle XXVI. sind für verschiedene Verhältnisse $\frac{a}{b}$ und $\frac{p}{q}$ die Hülfsgrösse $\varkappa_1$ und das grösste Angriffsmoment $\mathfrak{M}_B$ aus den Gleichungen 133)—138) berechnet.

Tabelle XXVI.

Grösstes Angriffsmoment $\mathfrak{M}_B$ bei günstigster Senkung der Auflager einer Brücke von 3 Oeffnungen.

$\frac{a}{b}$ =	1/2	3/4	4/5	5/6	7/8	9/10	1
$\frac{p}{q}$ = 1 Max $\mathfrak{M}_B$ =	qb^2 0,0625	qb^2 0,0625	qq^2 0,0625	qb^2 0,0625	qb^2 0,0625	qb^2 0,0665	qb^2 0,0858
$\varkappa_1$ =	q 1,009	q 0,704	q 0,707	q 0,712	q 0,72	q 0,62	q 0,284
3/4 Max $\mathfrak{M}_B$ =	0,0639	0,0665	0,0673	0,0676	0,0681	0,0718	0,0907
$\varkappa_1$ =	0,95	0,63	0,63	0,64	0,65	0,57	0,27
2/3 $\mathfrak{M}_B$ =	0,0644	0,0681	0,0691	0,0696	0,0706	0,0737	0,0925
$\varkappa_1$ =	0,92	0,60	0,60	0,61	0,61	0,55	0,26
1/2 $\mathfrak{M}_B$ =	0,0654	0,0708	0,0722	0,0730	0,0745	0,0771	0,0958
$\varkappa_1$ =	0,875	0,55	0,55	0,56	0,56	0,52	0,25
2/5 $\mathfrak{M}_B$ =	0,0660	0,0724	0,0741	0,0751	0,0768	0,0792	0,0980
$\varkappa_1$ =	0,85	0,52	0,52	0,53	0,53	0,50	0,24
1/3 $\mathfrak{M}_B$ =	0,0665	0,0735	0,0754	0,0765	0,0785	0,0805	0,0997
$\varkappa_1$ =	0,82	0,50	0,50	0,51	0,51	0,49	0,23
1/4 $\mathfrak{M}_B$ =	0,0670	0,0748	0,0771	0,0781	0,0805	0,0824	0,1010
$\varkappa_1$ =	0,80	0,47	0,47	0,48	0,48	0,47	0,23
1/5 $\mathfrak{M}_B$ =	0,0672	0,0757	0,0777	0,0793	0,0815	0,0834	0,1018
$\varkappa_1$ =	0,80	0,46	0,46	0,47	0,47	0,46	0,23
1/7 $\mathfrak{M}_B$ =	0,0675	0,0767	0,0791	0,0809	0,0829	0,0846	0,1033
$\varkappa_1$ =	0,78	0,44	0,44	0,44	0,45	0,45	0,22
1/9 $\mathfrak{M}_B$ =	0,0675	0,0772	0,0797	0,0815	0,0837	0,0854	0,1148
$\varkappa_1$ =	0,78	0,43	0,43	0,43	0,44	0,44	0,22

Eine Vergleichung der Tabellen XXV. und XXVI. ergibt, dass bei der vortheilhaften Senkung der Stützpunkte das Moment auf der Mittelstütze um 10—25 % sich verringert. Aus Tabelle XXVI. ist auch der Werth der Grösse $\varkappa_1$ zu entnehmen, für welchen je 2 der grössten Momente gleich werden. Die zugehörige Senkung der Mittelstützen erhält man aus der Gleichung 128).

$$\varkappa_1 = s \frac{24 E \Theta}{a^4}$$

woraus

$$s = \varkappa_1 \frac{a^4}{24 E \Theta} = \varkappa_1 \frac{b^4}{24 E \Theta} \left(\frac{a}{b}\right)^4 \quad . \quad 139)$$

Als Beispiel wählen wir, wie in N°. **75**. geschehen, einen Träger von der Höhe H, dessen Trägheitsmoment darnach bemessen ist, dass das grösste Angriffsmoment in der äussersten Faser eine Spannung $\mathfrak{A} = 600$ Kilo hervorbringt. Nun ist nach Gleichung 31)

$$\Theta = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}} \frac{H}{2}$$

und indem wir $H = {}^1/_{10} \frac{2a + b}{3}$, d. h. gleich ${}^1/_{10}$ der mittleren Spannweite der 3 Oeffnungen setzen, erhalten wir nach einigen Reductionen

$$s = \varkappa_1 b^3 \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^4}{1200 \mathfrak{M} \left(2 \frac{a}{b} + 1\right)}$$

Umstehende Tabelle XXVII. ist nach dieser Formel berechnet und sind zugleich in derselben diejenigen Spannweiten eingetragen, welche nach N°. **69**. aus Gleichung 103) und Tabelle XVII. sich ableiten. Es werden zwar für verschiedene Verhältnisse $\frac{a}{b}$ die Gewichte der Brücken bei gleicher Weite der Mittelöffnung verschiedene sein, sonach die Verhältnisse $\frac{p}{q}$ nicht immer denselben Spannweiten b entsprechen, doch ist für vorläufige Rechnungen und (durch Interpolation) für die meisten praktischen Fälle die günstigste Senkung genau genug bestimmt.

Die Tabellen XXV. — XXVII. geben zugleich wieder ein Bild von dem Einfluss, den eine absichtliche oder fehlerhafte Differenz in der Auflagerhöhe auf die Grösse der Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ ausübt. Es bestimmen sich hiedurch (wie in N°. **76**. für 2 Oeffnungen) gewisse Grenzen, innerhalb welcher die Continuität der Träger zulässig ist. Indem man nämlich für die Grenzen, zwischen denen s in der Ausführung schwanken kann, die Momente $\mathfrak{M}$ berechnet, erhält man Verhältnisszahlen für die Schwankungen der grössten Längenspannung, und können diese Grenzwerthe annähernd aus den Tabellen XXV. — XXVII. abgeleitet werden. Durch Benützung der empirischen Gleichung 136) finden sich in Tabelle XXVI. und XXVII. auch diejenigen Momente, beziehungsweise

Senkungen, wofür die 3 Maximalwerthe der Angriffsmomente gleichzeitig (ganz oder nahezu) gleich gross werden und sind die betreffenden Verhältnisse $\frac{a}{b}$ im Allgemeinen vorzuziehen, wenn die Senkung der Stützpunkte angewendet werden will.

Tabelle XXVII.

Günstigste Senkung für 3 Oeffnungen.

Weite der Mittelöffnung b.	$\frac{a}{b}$ =	1/2	3/4	4/5	5/6	7/8	9/10	1
—	$\frac{p}{q} = 1$ s = —	b 0,00042 —	b 0,00119 —	b 0,00148 —	b 0,00171 —	b 0,00205 —	b 0,00182 —	b 0,00092 —
—	3/4	0,00039 —	0,00100 —	0,00123 —	0,00142 —	0,00169 —	0,00155 —	0,00083 —
175 M.	2/3	0,00037 6,53 C.	0,00093 16,27	0,00114 19,93	0,00132 23,09	0,00153 26,77	0,00146 25,32	0,00078 13,65
100	1/2	0,00035 3,50 C.	0,00082 8,20	0,00100 10,00	0,00115 11,5	0,00133 13,3	0,00132 13,20	0,00072 7,25
70	2/5	0,00033 2,31 C.	0,00076 5,32	0,00092 6,44	0,00106 7,42	0,00123 8,61	0,00123 8,61	0,00068 4,76
45	1/3	0,00032 1,44 C.	0,00072 3,24	0,00087 3,91	0,00100 4,50	0,00115 5,17	0,00119 5,45	0,00064 2,88
25	1/4	0,00031 0,78 C.	0,00066 1,65	0,00080 2,00	0,00092 2,30	0,00106 2,65	0,00111 2,78	0,00063 1,58
18	1/5	0,00031 0,56 C.	0,00064 1,15	0,00078 1,40	0,00089 1,60	0,00102 1,84	0,00108 1,94	0,00063 1,13
12	1/7	0,00030 0,36 C.	0,00061 0,73	0,00073 0,87	0,00082 0,98	0,00099 1,19	0,00104 1,25	0,00059 0,71
8	1/9	0,00030 0,24 C.	0,00059 0,47	0,00071 0,57	0,00079 0,63	0,00093 0,74	0,00101 0,81	0,00053 0,42

83. Die Vortheile der Continuität der Brückenträger sind
1) Materialersparniss in den Gurtungen
2) leichtere Aufstellung insbesondere bei grösseren Wasserläufen und tiefen Thalübergängen.

Die Nachtheile sind:
1) Unsicherheit in der genauen Ermittlung der Angriffsmomente, indem letztere von der Höhenlage der Stützpunkte sehr abhängig sind.
2) Grosser Wechsel von Druck und Zug, sowohl in den Gurtungen als in den Wandausfüllungen.

Der letztere Nachtheil ist je nach der gewählten Construktionsweise mehr oder weniger empfindlich; bei sorgfältiger Ausführung und genügender Stärke der Dimensionen unbedenklich; auch die Unsicherheit in der Höhenlage der Stützpunkte ist bei grösseren Brücken weniger zu fürchten, und ganz zu vermeiden, oder wenigstens innerhalb enger Grenzen einzuschliessen.

Vortheile bei der Aufstellung bietet der continuirliche Träger nur dann, wenn die Hauptträger sammt den Querverbindungen als Ganzes am Lande aufgestellt und über die Pfeiler geschoben wird. Diese Aufstellungsart wird in Süddeutschland allgemein angewendet (zuerst von Benkiser in Pforzheim); gemäss den Untersuchungen über Senkung der Stützpunkte ist darauf zu sehen, dass durch das Schieben der Brücke keine Aenderungen in der Gestalt der Gurtungen eintreten, wie überhaupt ausserordentliche Anstrengungen einzelner Theile vermieden werden müssen.

Ob die Materialersparniss — der hauptsächlichste Vortheil der Continuität — im betreffenden Falle von Werth ist, soll noch näher untersucht werden.

Wenn man die Gurtungen proportional den Angriffsmomenten an Stärke wechseln lässt, so ist aus den graphischen Darstellungen der Tafeln IV. und V. ersichtlich, dass durch die Continuität eine Verringerung der Momente $\mathfrak{M}$ erzielt werden kann, welche bei 2 Oeffnungen etwa so gross ist wie bei 3 Oeffnungen; es kann hiedurch am Gewicht der Gurtungen 15—20 Prozent erspart werden.

Eine wichtige Verbesserung ist den continuirlichen Trägern durch die Senkung der Stützpunkte in Aussicht gestellt. — Denn wenn auch der mittlere Werth des Angriffsmoments hiedurch wenig vermindert wird, so werden doch die einzelnen Momente gleichförmiger; man kann z. B. bei 3 Oeffnungen bei Auswahl eines passenden Verhältnisses der Spannweiten (siehe Gleichung 136) ohne erheblichen Mehraufwand die Gurtung auf die ganze Brückenlänge gleich stark machen; in andern Fällen sind wenigstens die Differenzen gering. Hiedurch fallen insbesondere die Einwendungen hinweg, welche man gegen die Annahme gleicher Trägheitsmomente oft mit Recht machen kann.

Eine Vergleichung der Tabellen XXV. und XXVI. zeigt, dass bei 3 Oeffnungen bei gegebener Spannweite das Maximalmoment

gegenüber dem Werth von $0{,}125\,qb^2$, welcher dem grössten Moment des frei aufliegenden Trägers entspricht, bei Anwendung der Senkung der Stützpunkte um 25—45 %, ohne diese Senkung um 10—30 % vermindert wird. Dieselben Prozentansätze gehen aber bis auf 9, beziehungsweise 6 % herab, wenn die mittlere Spannweite wie in Tabelle XXIV. in Rechnung genommen wird. — Bei 2 Oeffnungen kann das grösste Moment ohne Senkung des Zwischenstützpunktes nicht vermindert werden, durch letztere Vorkehrung nach Tabelle XXI. um 24—28 %. — Diese Vergleichung der Maximalwerthe hat aber meist weniger praktischen Werth, da man bei grösseren Brücken die Trägerstärke mit dem Momente abnehmen lässt; bei kleineren Brücken soll aber die Continuität aus mehrfachen Gründen nicht angewendet werden.

§. 8. Einfluss der Auflagerbreite und Träger-Anzahl.

84. Es war bis dahin angenommen, dass die Auflager-Reactionen (oder Auflagerdrücke) je auf einem Punkte concentrirt seien. — Es ist auch entschieden am zweckmässigsten, wenn man die Auflagerbreite so sehr reduzirt, als es die Widerstandsfähigkeit der angewendeten Baumaterialien gestattet: der Träger erhält an der betreffenden Stelle meist eine Vertikal-Rippe (Vertikal-Ständer) und ist hiedurch die Auflagerfläche gegeben. — Man hat die Auflagerfläche bei einigen grösseren Brücken dadurch ausserordentlich reduzirt, dass man die Berührungsflächen von Gussstahl herstellte; aber auch bei Gusseisen oder Schmiedeisen genügt eine verhältnissmässig kleine Berührungsfläche zwischen Träger und Unterlagsplatten. Wenn dann der ganze Druck durch wenige Quadratzolle aufgenommen wird, so kann man über die Richtung der Druck-Resultante nicht im Zweifel sein; die Auflagerbreite darf entschieden vernachlässigt werden, indem man die Distanz der Auflagermittel als Spannweite annimmt.

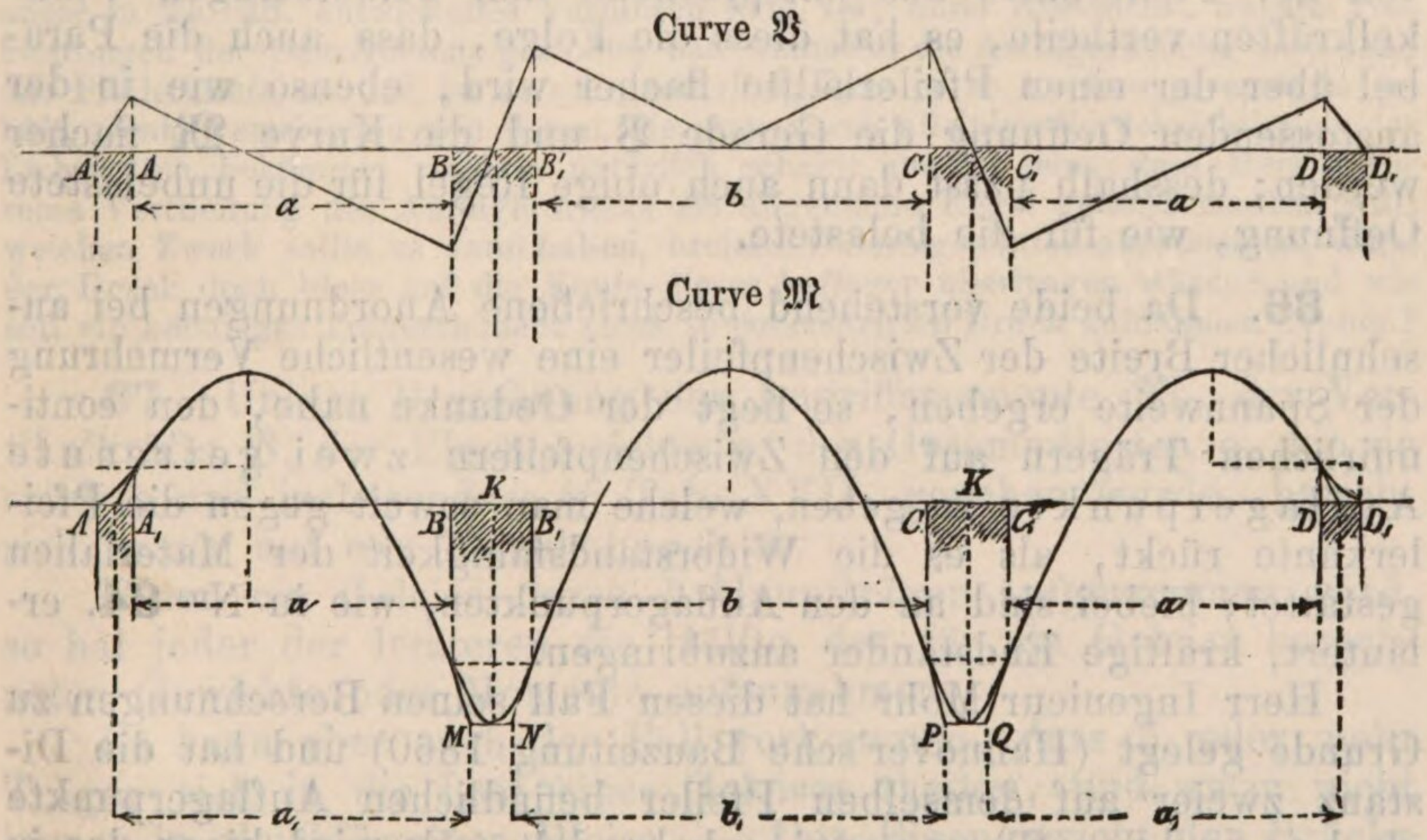
Es ist selbstverständlich, dass der Auflagerdruck nicht zu nahe der Mauerkante gelegt werden darf; die in die Berechnung zu ziehende Spannweite ist also immer wesentlich grösser als die Lichtweite der Steinpfeiler. — Wenn aber eine Auflagerplatte gegen den Brückenträger nur eine kleine Auflagerfläche bedarf, so muss doch letztere gegen die Steinunterlage erbreitert werden; die Platte muss durch passende Rippen verstärkt sein, damit der auf einem Punkte concentrirte Auflagerdruck auf eine grössere Steinfläche übertragen werden kann; die Unterlagsplatten erhalten dann die Form von Lagerschuhen.

85. Wenn man Auflager anwendet, welche dem Träger eine grössere Berührungsfläche darbieten, so kann es das Bestreben des Constructeurs sein, den Druck auf der breiteren Auflagerfläche möglichst gleichmässig zu vertheilen; diess wird durch entsprechende

Anordnung der Endstreben und Endständer geschehen, welche den Vertikaldruck auf die Auflager zu übertragen haben. — Wir nehmen die Aufgabe als möglichst vollständig gelöst an, und denken uns den Auflagerdruck gleichförmig auf dem Auflager vertheilt; (bei den Zwischenpfeilern ist der Druck nach der Grösse der beiderseitigen Vertikalkräfte zu beiden Seiten des Pfeiler-Mittels verschieden, allein je auf eine Pfeiler-Hälfte wieder gleichförmig vertheilt angenommen) alsdann ändert sich die Vertikalkraft auf die Breite des Auflagers gleichförmig und ebenso gehen auch die Kurven der Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ stetig in einander über; die Kurve $\mathfrak{M}$ besteht nach diesen Annahmen auch über den Pfeilern aus Parabelbögen.

Hiedurch ist die in Fig. 71 für einen continuirlichen Träger gezeichnete allgemeine Gestalt der Kurven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ zunächst für den Fall der gleichförmig vertheilten Maximallast gerechtfertigt.

Fig. 71.



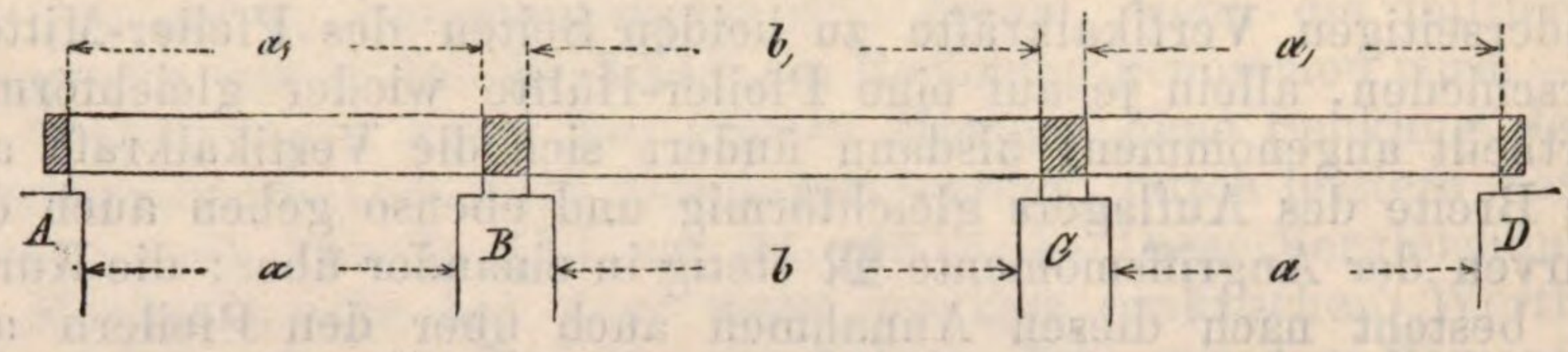
Verlängert man in Fig. 71. die der Lichtweite AB entsprechende Parabel, bis sie die Horizontalen AA und MN trifft, so wird hiedurch die Distanz AA, beziehungsweise BK vermöge den Eigenschaften der Parabel, (nahezu) halbirte, und ist also die

$$\text{Distanz } a_1 = a + \frac{AA}{2} + \frac{BB}{2}.$$

Um diese stellvertretende Parabel construiren zu können, ist es nothwendig, den Punkt $\mathfrak{V} = o$ oder die Grösse des Auflagerdrucks bei A zu kennen. Zu diesem Zwecke substituiren wir die in Fig. 72. gezeichnete Anordnung; indem man von den schraffirten Theilen absieht, erhält man einen continuirlichen Träger, dessen

Auflager auf einzelne Punkte concentrirt und dessen Spannweite a_1 b_1 und a_1 sind. Um die Weite a_1 zu finden, ist zur lichten

Fig. 72.



Entfernung a der Auflagerplatten die halbe Breite der Endauflager-Breite und ein Viertheil der mittleren Auflagerbreite zu addiren.

Wir haben schon angedeutet, dass bei einseitiger Belastung eines Mittelpfeilers anzunehmen ist, dass der Auflagerdruck sich von der Pfeilermitte aus entsprechend den beiderseitigen Vertikelkräften vertheile, es hat diess die Folge, dass auch die Parabel über der einen Pfeilerhälfte flacher wird, ebenso wie in der anstossenden Oeffnung die Gerade $\mathfrak{V}$ und die Kurve $\mathfrak{M}$ flacher werden; desshalb passt dann auch obige Regel für die unbelastete Oeffnung, wie für die belastete.

86. Da beide vorstehend beschriebene Anordnungen bei ansehnlicher Breite der Zwischenpfeiler eine wesentliche Vermehrung der Spannweite ergeben, so liegt der Gedanke nahe, den continuirlichen Trägern auf den Zwischenpfeilern zwei getrennte Auflagerpunkte zu geben, welche man soweit gegen die Pfeilerkante rückt, als es die Widerstandsfähigkeit der Materialien gestattet; hiebei sind an den Auflagerpunkten, wie in N°. **84.** erläutert, kräftige Endständer anzubringen.

Herr Ingenieur Mohr hat diesen Fall seinen Berechnungen zu Grunde gelegt (Hannover'sche Bauzeitung 1860) und hat die Distanz zweier auf demselben Pfeiler befindlichen Auflagerpunkte als besondere Spannweite behandelt. Es wird hiezu das in N°. **21.** und **22.** entwickelte Verfahren von Clapeyron angewendet, indem die grössere Anzahl der Oeffnungen keine besondere Schwierigkeit darbietet. — Die Rechnung ergibt bald den Missstand, dass bei einseitiger Belastung der homogen gedachte Träger sich von dem einen der Auflagerpunkte abhebt. Für den Werth der grössten Momente ist letzteres allerdings ohne nachtheiligen Einfluss, da die belastete Oeffnung keine grössere Spannweite erhält (es entsteht durch die grössere Weite der unbelasteten Oeffnung eher ein Vortheil), in Wirklichkeit wird aber in Folge kleiner Formänderungen der Auflager und der über dem Pfeiler befindlichen Trägertheile ein Abheben von dem einen Auflager nicht so bald eintreten, und werden die grösseren Spannweiten sich nahezu ver-

halten, wie wenn die beiden Auflager desselben Pfeilers in einem Punkte vereinigt wären.

Wir sehen also in der Berechnung von den kleinen Spannweiten über den Pfeilern ab, und indem wir wieder Fig. 72. zu Grunde legen, wird die Brücke gerechnet, wie wenn ihre concentrirten Auflagerpunkte bloss durch die Spannweite a_1 b_1 und a_1 getrennt wären, wobei aber die Weiten a_1 und b_1 durch die Construction genau bestimmt und durch besondere Endständer markirt sind.

Das Abheben eines continuirlichen Trägers von dem einen der beiden Auflager desselben Pfeilers wird desto eher geschehen, je grösser der Winkel ist, den die Tangente der elastischen Linie daselbst mit dem Horizont bildet; — ein weiterer Beweis, dass wir in N°. **78.** mit Recht einen Werth auf thunlich kleine Tangentenwinkel gelegt haben.

Anmerkung. Hr. Mohr hat bei dieser Gelegenheit uns vorgeworfen, dass unser in No. **85.** entwickeltes Verfahren irrig sei; ohne Rücksicht, welche Vorkehrungen der Constructeur getroffen hat, nimmt er die Auflagerdrücke sehr nahe der Pfeilerkante an und ist es sehr natürlich, dass er so Rechnungsresultate erhält, wenig verschieden von denen, die man durch alleinige Berücksichtigung der Lichtweiten bekömmt; weniger natürlich scheint uns zu sein, dass Herr Mohr seine Vertheilung des Auflagerdrucks als allgemeine Regel geltend machen will; welchen Zweck sollte es dann haben, breitere Unterlagsplatten anzuwenden, wenn der Druck doch bloss auf die Kante dieser Auflager übertragen würde? und wie soll ein beliebiges Trägerelement einen so concentrirten Druck aufnehmen können?

87. Unsere Berechnung der Angriffsmomente $\mathfrak{M}$, der Vertikalkräfte $\mathfrak{V}$, der Eigengewichte p, der Gesammtlasten q, wie sie seitdem und insbesondere in Tab. XVII. gegeben wurde, bezieht sich immer auf ein Eisenbahngeleise.

Wenn ein Geleise durch 2 Hauptträger aufgenommen wird, so hat jeder der letzteren die Hälfte der für ein Geleise berechneten Gewichte oder Momente aufzunehmen.

Es kann aber auch der Fall vorkommen, dass 3 oder mehr Träger sich in die Last eines Geleises theilen, und zwar nicht immer in gleichförmiger Weise. — Das Eigengewicht der Brücke wird dadurch nicht wesentlich alterirt; es bedarf aber einer besonderen Betrachtung, wie viel von diesem Eigengewicht und wie viel von der zufälligen Last auf jeden Träger fällt.

Häufiger kommt der Fall vor, dass 2 Geleise von denselben Hauptträgern gemeinschaftlich aufgenommen werden.

Wenn nur zwei Hauptträger vorhanden sind, so sind für jeden derselben die für ein Geleise antreffenden Gewichte p, q, $\mathfrak{V}$ und Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ zu rechnen. Denn immer ist der Fall der gleichzeitigen Belastung beider Geleise ins Auge zu fassen. — Am Eigengewicht p kann zwar durch Verminderung der Trägeranzahl eine Ersparniss realisirt werden, doch hängt diess von der Constructionsweise und der Spannweite ab.

Wenn drei Träger zur Aufnahme von zwei Geleisen dienen,

so hat der mittlere etwa die Hälfte der zufälligen Last aufzunehmen und zwar mehr oder weniger, je nach dem Hebelverhältniss, das durch die Anordnung der Querträger gegeben worden ist. — Es ist nicht rathsam, den Querträger als continuirlichen Träger über den mittleren Hauptträger hindurchgehen zu lassen; denn es wird derselbe bei Belastung der einen Brückenseite doch wenig verschieden von einem einfachen Träger wirken (weil das Gegengewicht der Belastung des andern Geleises fehlt), während bei gleichzeitiger Belastung beider Geleise die Aussenträger verhältnissmässig weniger, der Mittelträger mehr als die Hälfte der Last auszuhalten hat. — Man könnte eine solche Tieferlegung des Mittel-Hauptträgers vorschlagen, dass dieser Missstand vermieden würde; — es ist jedoch zu bedenken, dass hiedurch die Steifigkeit und Unverrückbarkeit der ganzen Construction wesentlich leiden und dass der Nachweis von dem steten Vorhandensein der beabsichtigten Tieferlegung schwer fallen würde.

Vorausgesetzt, dass die Querträger je über zwei Hauptträger frei gespannt sind, so kann die Vertheilung der Last keinen Zweifel lassen, indem wieder beide Geleise gleichzeitig belastet angenommen werden und das Eigengewicht der Träger sich etwa gerade so vertheilt, wie die Verkehrsbelastung.

88. Wenn die zwei Geleise einer Brücke durch 2 oder 3 Hauptträger aufgenommen werden, so wird bei dem am häufigsten vorkommenden Falle der Belastung des einen Geleises eine verschiedene Einbiegung der einzelnen Hauptträger stattfinden.

Es wird diese Senkungsdifferenz bei frei aufliegenden Trägern am grössten sein. — Die Einbiegung f ist für einen mit der Maximallast q behafteten Träger nach Gleichung 42)

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{E \Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 42)$$

wo l die Spannweite des Trägers bezeichnet. — Es ist aber nach Gleichung 31)

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}}{a} \Theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

ferner ist für den mittleren Querschnitt (wo die grösste Senkung stattfindet)

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{8} q l^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

und

$$a = \frac{H}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

d. h. gleich der halben Trägerhöhe zu setzen; aus den Gleichungen I.—III. folgt:

$$\Theta = \frac{\mathfrak{M} \cdot H}{2 \cdot \mathfrak{A}} = \frac{q \cdot l^2}{16} \cdot \frac{H}{\mathfrak{A}} \quad \ldots \quad \text{IV.}$$

und durch Wertheinsetzung in Gleichung 42)

$$f = \frac{5}{24} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{E} \cdot \frac{l^2}{H} \quad \ldots \quad 140)$$

Für den Fall der Maximalbelastung darf für schmiedeiserne Brücken $\mathfrak{A} = 600$ K. per □Cent., und $\frac{E}{\mathfrak{A}} = 3000$ angenommen werden; woraus endlich als grösste Einbiegung eines solchen vollständig belasteten freitragenden schmiedeisernen Trägers folgt

$$f = 0{,}00007 \frac{l}{H} \cdot l \quad \ldots \quad 141)$$

Bei einseitiger Belastung hat jeder Träger nur einen Theil dieser Einbiegung zu erleiden; ist er nämlich mit q per Längeneinheit belastet, so ist seine grösste Einsenkung

$$f_1 = \frac{q}{q} 0{,}00007 \frac{l}{H} \cdot l \quad \ldots \quad 142)$$

und indem man f_1 für die einzelnen Träger berechnet, erhält man die gesuchten Senkungsdifferenzen.

Beispiel. Eine Brücke von 40 M. Spannweite habe für 2 Geleise nur 2 Hauptträger; es ist nach Tabelle XVII. das Eigengewicht $p = \frac{1}{3} q$, ferner die zufällige Belastung eines Geleises $k = \frac{2}{3} q$; es vertheile sich letztere bei einseitiger Belastung nach den Verhältnisszahlen $\frac{2}{7}$ und $\frac{5}{7}$, so dass der eine Träger $\frac{2}{7} k = \frac{4}{21} q$, der andere $\frac{5}{7} k = \frac{10}{21} q$ als zufällige Last erhält; die Gesammtbelastung der beiden Träger ist daher

für den Träger I. $p + \frac{4}{21} q = \frac{11}{21} q$,

für den Träger II. $p + \frac{10}{21} q = \frac{17}{21} q$.

Es ist somit nach Gleichung 142), indem man für l seinen Werth 40 M. = 4000 Cent. einsetzt, und das Verhältniss $\frac{l}{H} = 10$ annimmt,

für den Träger I.

$$f_1 = \frac{11}{21}\ 0{,}0007\ .\ 4000 \text{ Cent.} = 1{,}6 \text{ Cent.}$$

für den Träger II.

$$f_1 = \frac{17}{21}\ 0{,}0007\ .\ 4000 \text{ Cent.} = 2{,}475 \text{ Cent.}$$

Die Senkungsdifferenz beider Träger beträgt somit bei einseitiger Belastung in der Mitte 0,875 Cent., was eine ganz unbedeutende Verwindung der Brücke, beziehungsweise Drehung des mittleren Querschnitts voraussetzt.

Bei zweigeleisigen Brücken mit 3 Hauptträgern bemerkt man häufig eine Senkung sämmtlicher 3 Träger, auch wenn diese nicht durch continuirliche Querträger verbunden sind; es wird nämlich durch starke Querabsteifung ein Zusammengehen sämmtlicher Träger verursacht, während bei gleichzeitiger Belastung der beiden Geleise der Mittelträger nicht mehr auszuhalten hat, als ihm durch die Hebelverhältnisse der Querträgerbelastung zugetheilt werden will.

§. 9. Querträger, Schwellenträger und kleine Brücken.

89. Man hat es bei kleinern Trägern meist mit concentrirten Lasten zu thun; die Berechnung der Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ und Vertikalkräfte $\mathfrak{V}$ geschieht nach Gleichung 100)—102) insolange die Träger an beiden Enden frei aufliegen.

Solche Träger continuirlich herzustellen ist, wie schon mehrfach angeführt, nicht rathsam. — Denn einmal ist der erwartete Vortheil sehr gering, sodann ist in N°. **75.** und **82.** nachgewiesen, wie kleine Differenzen in der Höhenlage der Zwischenstützen sehr erhebliche Aenderungen in den Angriffsmomenten verursachen können, so dass der Vortheil der Continuität schliesslich ganz verloren geht und statt dessen lediglich eine Ungewissheit über die wirklich vorhandenen Kräfte eintritt. — Will man z. B. einen solchen Träger als Fachwerk construiren, so kann man beim frei auflie-genden Träger jedem Glied die gerade nothwendige Stärke geben, während beim continuirlichen Träger die in jedem Constructionsglied herrschende Spannung mehr oder weniger unbestimmt ist und desshalb dem Träger theilweise eine übermässige Stärke gegeben werden müsste.

Träger, welche in derselben Längenrichtung liegen, können desshalb an den Enden doch eine Verbindung erhalten; es dient diess nicht nur zur Solidität der ganzen Construction, sondern es hat auf die Tragfähigkeit jedenfalls einen günstigen Einfluss; wenn die Spannung in einem gegebenen Falle genau ermittelt werden soll, so wird man diese Verbindung an den Enden dadurch be-

rücksichtigen, dass man das hiedurch hervorgerufene Widerstandsmoment der Verbindung in die Rechnung einführt; es ist diess im Allgemeinen durch die Stellung und Querschnittfläche der Verbindungsbolzen bestimmt.

Bei Berechnung neuer Brückenträger werden wir aber von diesen Endverbindungen absehen, zumal die Momente, wenn keine Continuität beabsichtigt ist, meist nur kleine Werthe haben.

90. Bei kleinen Trägern darf bei der Berechnung der Querschnittdimensionen das Eigengewicht der Träger selbst meist vernachlässigt werden. Wenn man dann blos frei aufliegende Träger annimmt, so wird die ganze Rechnung ausserordentlich einfach und reduzirt sich auf eine wiederholte Anwendung des Hebelgesetzes.

Bei den homogenen Trägern sind Beispiele gerechnet und auch für die gewöhnlich vorkommenden Fälle die Angriffsmomente in Zahlenwerthen ausgedrückt und den Widerstandsmomenten der häufiger vorkommenden Querschnittformen gegenüber gestellt.

Um jedoch auch für besondere Fälle die Rechnung zu erleichtern und die Eigenschaften der kleinern Träger vollständiger zur Ausführung zu bringen, sind in folgender Tabelle XXVIII. die Angriffsmomente und Einsenkungen einer Reihe von Träger-Anordnungen zusammengestellt.

(Die Tabelle folgt auf den nächsten Seiten.)

Tabelle XXVIII.

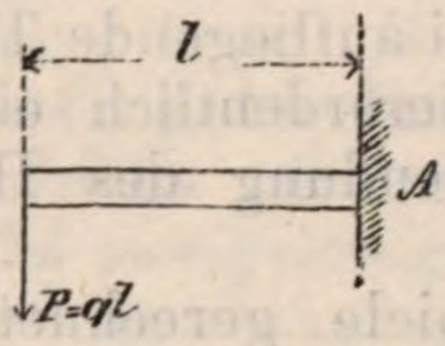
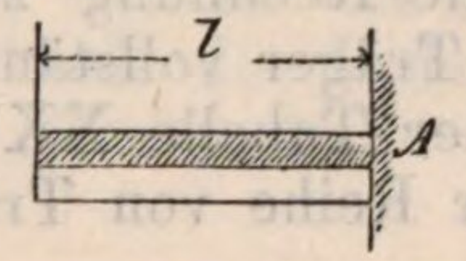
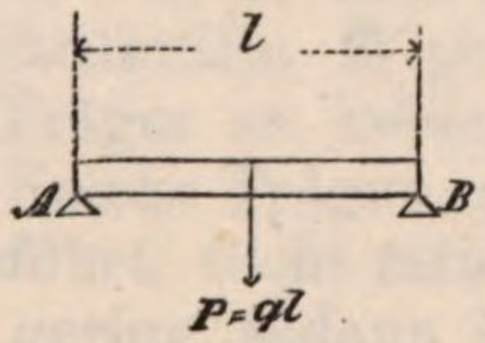
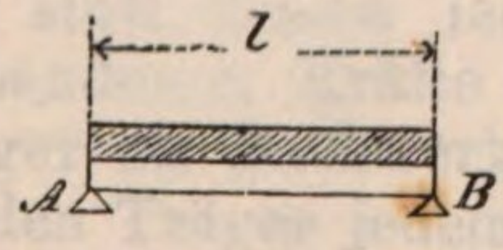
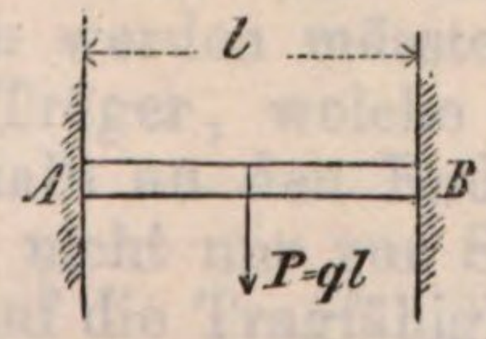
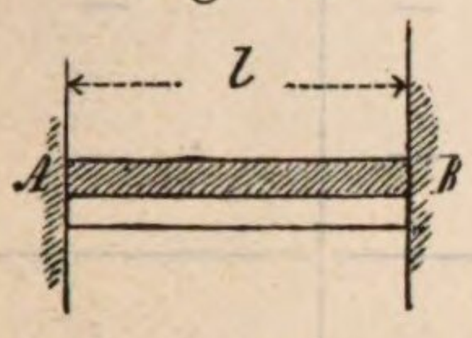
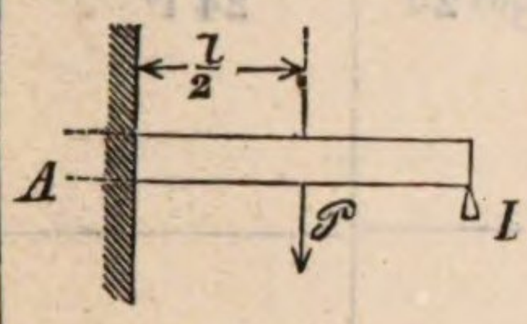
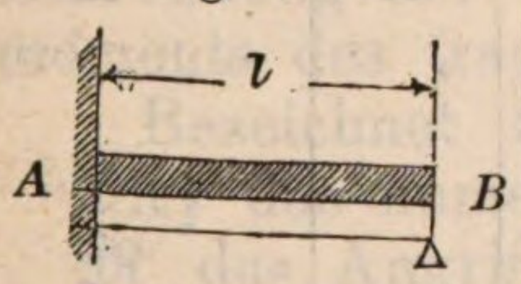
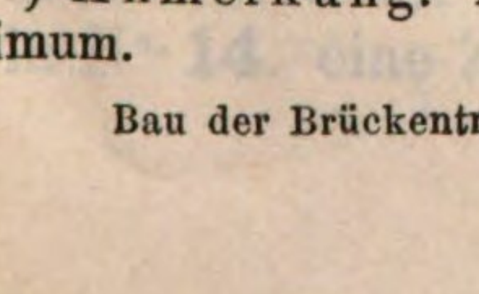
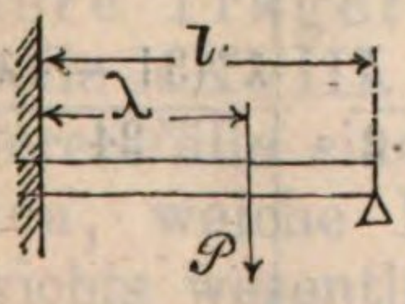
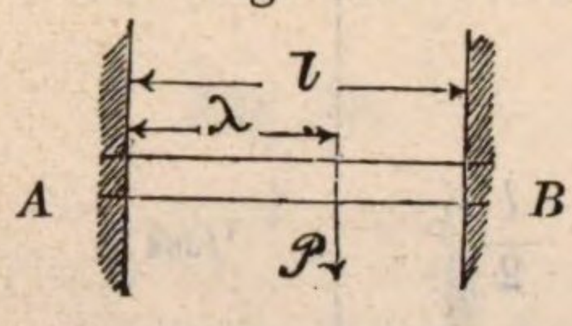
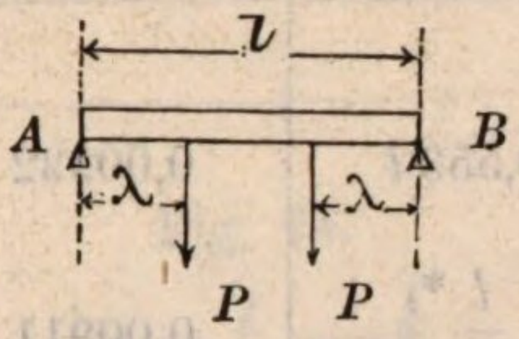
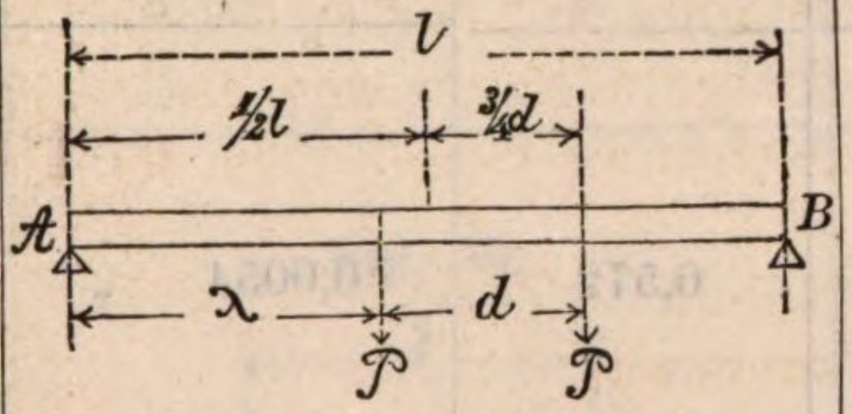
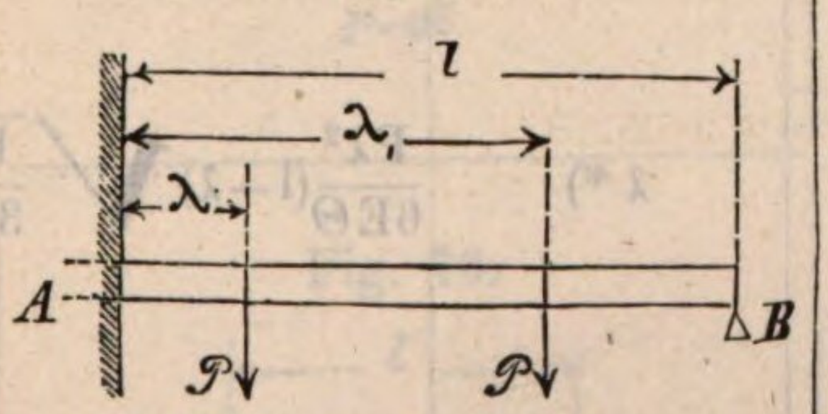
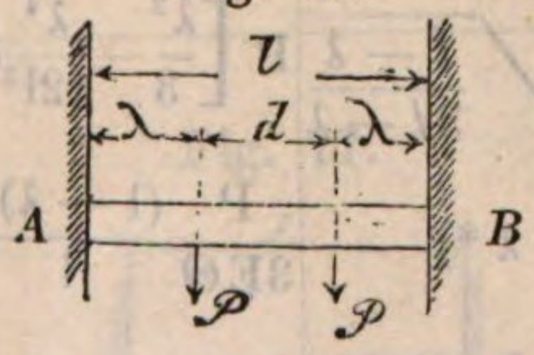
Nro.	Anordnung des Trägers.	Maximalwerthe der Angriffsmomente.			Grösste Einbiegung.		
		Abscisse von A aus gerechnet.	$\mathfrak{M}$		Abscisse von A aus gerechnet.	Einbiegung.	
1	Fig. 73. 	0	$Pl = ql^2$		l	$1/3$	$\frac{ql^4}{E\Theta}$
2	Fig. 74. 	0		$\frac{ql^2}{2}$	l	$1/8$	„
3	Fig. 75. 	$\frac{l}{2}$	$\frac{Pl}{4} = \frac{ql^2}{4}$		$\frac{l}{2}$	$1/48$	„
4	Fig. 76. 	$\frac{l}{2}$		$\frac{ql^2}{8}$	$\frac{l}{2}$	$5/384$	„
5	Fig. 77. 	0, $\frac{l}{2}$, l	$\frac{Pl}{8} = \frac{ql^2}{8}$		$\frac{l}{2}$	$1/192$	„

Tabelle XXVIII. (Fortsetzung.)

Nro.	Anordnung des Trägers.	Maximalwerthe der Angriffsmomente.		Grösste Einbiegung.	
		Abscisse von A aus gerechnet.	$\mathfrak{M}$	Abscisse von A aus gerechnet.	Einbiegung.
6	Fig. 78. 	0 und l $\frac{l}{2}$	$\frac{ql^2}{12}$ $\frac{ql^2}{24}$	$\frac{l}{2}$	$^1/_{384}\ \frac{ql^4}{E\Theta}$
7	Fig. 79. 	in A $= 0$	$\frac{3}{16}\,Pl = \frac{3}{16}\,ql^2$	$0{,}553\,l$ $\frac{l}{2}$ *)	0,00932 „ 0,00911 „
8	Fig. 80. 	0	$\frac{1}{8}\,ql^2$	0,572	0,0054 „
9	Fig. 81. 	λ	$P\,\frac{\lambda}{l}\,(l-\lambda)$	λ *)	$\frac{P\lambda^2}{6E\Theta}(l-\lambda)\sqrt{\frac{l-\lambda}{3l-\lambda}}$
10	Fig. 82. 	in A $= 0$ λ	$P\,\frac{\lambda\,(2l-\lambda)\,(l-\lambda)}{2l^2}$ $P\,\frac{\lambda^2\,(3l-\lambda)\,(l-\lambda)}{2l^3}$	$l - l\sqrt{\frac{l-\lambda}{3l-\lambda}}$ λ *)	$P\left[\frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^4}{12l^3}(3l-\lambda)^2\right]$ $\frac{P}{3E\Theta}\,\frac{(l-\lambda)^2}{l}\,\lambda^2$

*) Anmerkung. An den mit *) bezeichneten Abscissen ist die grösste Einbiegung kein Maximum.

Tabelle XXVIII. (Fortsetzung.)

Nro.	Anordnung des Trägers.	Besondere Werthe der Angriffsmomente.		Grösste Einbiegung.	
		Abscisse.	$\mathfrak{M}$	Abscisse.	Einbiegung.
11	Fig. 83. 	in A $= 0$	$P \frac{\lambda (l-\lambda)^2}{l^2}$	—	—
		λ	$P \frac{\lambda^2 (l-\lambda)^2}{2 l^3}$	—	—
		l	$P \frac{\lambda^2 (l-\lambda)}{l^2}$	—	—
12	Fig. 84. 	λ bis $\lambda + d$	$P \frac{l-d}{2}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{\lambda (3l^2 - 4\lambda^2)}{24 l^3} \cdot \frac{P}{E\Theta}$
13	Fig. 85. 	$\lambda = \frac{l}{2} - \frac{d}{4}$	$P \frac{(2l-d)^2}{8l}$	—	—
14	Fig. 86. 	λ	$P \frac{\lambda}{l} (2l - \lambda - \lambda_1)$	—	—
		λ_1	$P \frac{l-\lambda_1}{l} (\lambda + \lambda_1)$	—	—
15	Fig. 87. 	in A $= 0$	$P\lambda \frac{l-\lambda}{l}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{\lambda^2 (3l - 4\lambda)}{24} \cdot \frac{P}{E\Theta}$
		λ bis $\lambda + d$	$P \frac{\lambda^2}{2}$		

Anmerkung. Fall 13 ist die ungünstigste Stellung der beiden Lastpunkte; es ist $\mathfrak{M}$ nach Umformung $= P \frac{l-d}{2} + P \frac{d^2}{8}$ (vergl. Fall 12).

Vierter Abschnitt.

Entwicklung der praktischen Regeln für Brückenträger mit vollen Wandungen.

§. 10. Homogene Träger.

91. Das Widerstandsmoment eines Trägers mit voller Wandung, also insbesondere eines homogenen Trägers findet sich unter Anwendung der Gleichung 31), durch Berechnung des Trägheitsmoments des fraglichen Trägers.

Bezeichnet für einen beliebigen Querschnitt x:

ΣXy das numerisch gleiche Widerstandsmoment,

$\mathfrak{M}$ das Angriffsmoment,

$\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$), die Spannung (Pressung) in den äussersten Fasern,

$\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{b}$) die Entfernung der äussersten gespannten (gepressten) Faser von der neutralen Faser,

Θ das Trägheitsmoment des Träger-Querschnitts,

so ist

$$\mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}} \Theta = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}} \Theta \quad . \quad . \quad . \quad 31)$$

Im vorhergehenden Abschnitte sind die Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ für einzelne Fälle berechnet und sind insbesondere in §. 9. kleinere Träger, Querträger etc. behandelt, und ist hiefür in Tabelle XXVIII. eine besondere Zusammenstellung gegeben. Besondere Fälle sind nach Gleichung 100)—102) (Seite 91.) zu berechnen, welche Formeln sich durch Vernachlässigung des Eigengewichts wesentlich vereinfachen.

Die für jedes Material zulässigen Spannungen und Pressungen sind im 2. Abschnitt verzeichnet, die Berechnung der Trägheitsmomente Θ ist schon im 1. Abschnitte entwickelt; es ist daselbst in N°. **14.** eine Zusammenstellung der häufiger vorkommenden Träg-

heitsmomente gegeben; wir werden aber auch einige bequeme Annäherungen einführen.

Die Anwendungen dieser verschiedenen Formeln und Tabellen wird sich aus den folgenden Beispielen als sehr einfach und leichtfasslich darstellen.

92. Die schmiedeisernen Träger werden im Brückenbau am häufigsten angewendet und zeigen auch die grösste Ausbildung. — Für gutes Walzeisen darf zwar 660 Kilo als zulässige Spannung berechnet werden, doch wenden wir für kleinere Träger nur 550—600 Kilo grösste Spannung an; hiernach sind denn auch die folgenden Regeln gebildet worden.

Es findet nämlich bei den homogenen schmiedeisernen Trägern, insofern sie meist mit Mittelrippe und Gurtungsrippen versehen sind, die grösste Spannung nicht in den äussersten Längenfasern der Gurtungsrippen statt, sondern da wo die Mittelrippe in die Gurtungsrippe übergeht; denn da man es vorzugsweise mit concentrirten Lasten zu thun hat, denen gegenüber das Eigengewicht verschwindend klein ist, so ist die Vertikalkraft auf eine grössere Ausdehnung nahezu constant und max $\mathfrak{M}$ fällt mit max $\mathfrak{V}$ im Allgemeinen nahezu zusammen. Ein Blick auf Tabelle VI. zeigt, wie die gleichzeitigen Längenspannungen und horizontalen Schubspannungen sich zur grössten schiefen Spannung combiniren; damit die grösste schiefe Spannung den obigen Werth von 550—600 Kilo nicht überschreite, nehmen wir die Längenspannung in der äussersten Faser entsprechend niedriger an.

Indem wir die Bezeichnungen beibehalten, die in der vorhergehenden Nummer erläutert sind, so haben wir nach Gleichung 31).

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{a}\,\Theta = \frac{\mathfrak{B}}{b}\,\Theta \\ \mathfrak{A} &= \mathfrak{M}\,\frac{a}{\Theta} = \mathfrak{B}\,\frac{a}{b} \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{M}\,\frac{b}{\Theta} = \mathfrak{A}\,\frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 143)$$

Ist alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt, so soll $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ nicht grösser als 500 genommen werden.

Die Mittelrippe trägt zum Werth des Trägheitsmoments nur wenig bei; sie wird desshalb bei schmiedeisernen homogenen Trägern thunlich dünn gehalten; doch ist für ihre Stärke durch die Vertikalkraft $\mathfrak{V}$ ein bestimmtes Minimum gegeben:

Bezeichnet nämlich für einen Vertikalschnitt x

$\mathfrak{V}$ die vom Querschnitt zu übertragende Vertikalkraft,

ΣY den numerisch gleich grossen Vertikalwiderstand,

S_0 die in der neutralen Faser des Trägers an der betrachteten Stelle per Längeneinheit wirkende Schubkraft,

$\mathfrak{S}_0$ die auf die Quadrateinheit reduzirte Schubspannung ebendaselbst,
$\mathfrak{H}$ die Distanz der Mittelpunkte von Druck und Zug,
δ die Dicke der Mittelrippe,
so ist nach Gleichung 46)

$$S_0 = \frac{\Sigma Y}{\mathfrak{H}} = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

und nach Gleichung 47)

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{S_0}{\mathfrak{z}} = \frac{S_0}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

und folgt nun aus I. und II. als horizontale Schubspannung in der neutralen Faser

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\mathfrak{V}}{\delta \mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 144)$$

Ist alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt, so soll $\mathfrak{S}_0$ nicht grösser als 350 sein, woraus sich die Regel ergibt

$$\delta \geqq \frac{\mathfrak{V}}{350\,\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 145)$$

wo wieder Alles in Kilogr. und Centim. ausgedrückt gedacht ist.

Zur genauen Bestimmung von $\mathfrak{H}$ dienen die Gleichungen 45) und 46) der N°. **24.** — Unter Beibehaltung der seitherigen Bezeichnungen ist nach Gleichung 45)

$$S_0 = \frac{\Sigma Y}{\Theta} \int_0^b zy \,.\, dy \quad \ldots\ldots \quad \text{I.}$$

nach Gleichung 46)

$$S_0 = \frac{\Sigma Y}{\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

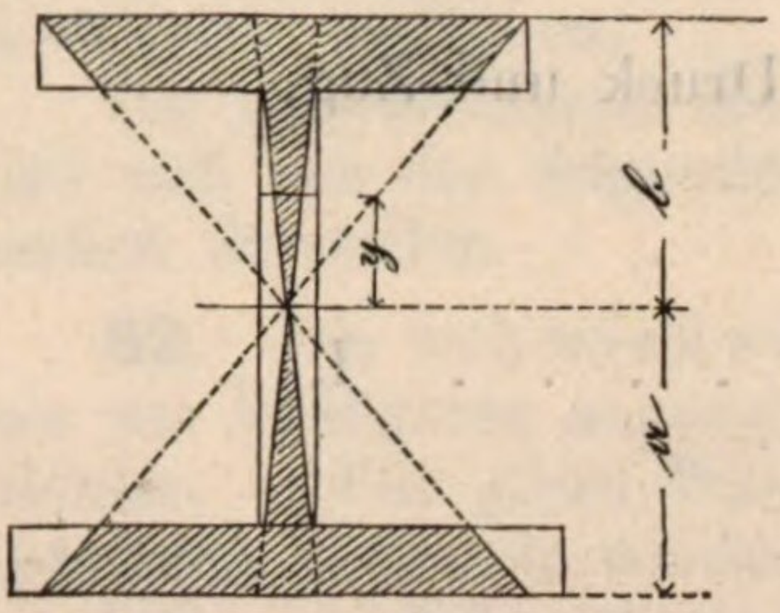
woraus

$$\mathfrak{H} = \frac{\Theta}{\int_0^b zy \,.\, dy} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 146)$$

Das Integral bedeutet das Moment des gepressten Querschnitts in Bezug auf die neutrale Axe, welches sich meist einfach rechnet.

Man kann aber $\mathfrak{H}$ auch mittelst eines theilweise graphischen Verfahrens bestimmen, wenn man, wie in Fig. 88. geschehen, für jeden Höhenabstand Zug oder Druck der betreffenden Längenfasern (welche Kräfte bekanntlich dem Abstand von der neutralen Axe direkt proportional sind) als Ordinaten parallel

Fig. 88.



der Axe der z aufträgt, so dass z. B. die in Fig. 88. schraffirten Flächen die sämmtlichen Zugkräfte, beziehungsweise Drücke darstellen, die Schwerpunkte dieser Flächen aber eben die Mittelpunkte von Druck und Zug sind, der Abstand $\mathfrak{H}$ gesucht ist.

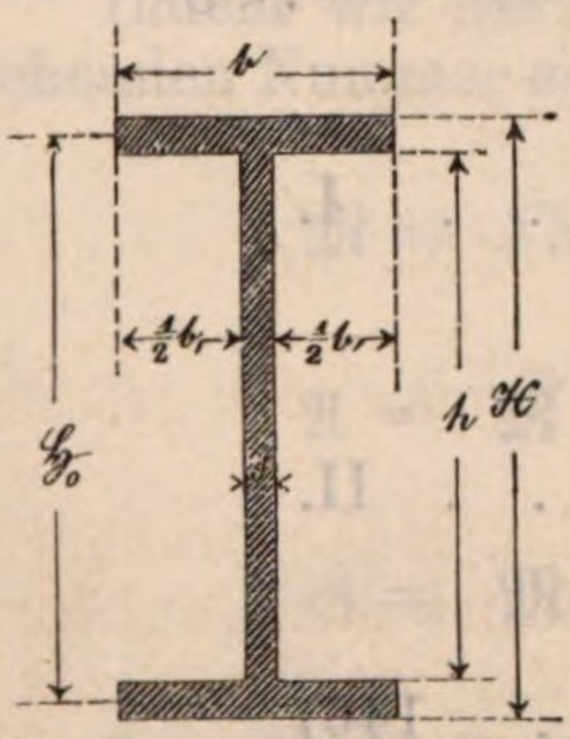
Wenn die Distanz $\mathfrak{H}_0$ der beiden Resultanten der in den Gurtungen herrschenden Kräfte bekannt ist, so dass $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{b}_0$ die Abstände der genannten Resultanten von der neutralen Axe bezeichnen, wenn ferner die Höhe der Mittelrippen oder Mittelwand gleich $\mathfrak{H}_0$ angenommen werden darf (was bei grösseren Trägern meist ziemlich genau zutrifft) und wenn Ω_a (Ω_b) den Querschnitt der gespannten (gepressten) Gurtung bezeichnet, so ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \left\{ 1 - \frac{1}{12} \frac{\delta\,(\mathfrak{a}_0^{\,2} + \mathfrak{b}_0^{\,2})}{\mathfrak{b}_0\,(\Omega_b + {}^1/_2\,\delta\mathfrak{b}_0)} \right\} \quad 147)$$

Für symmetrische Querschnitte ist $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_0 = {}^1/_2\,\mathfrak{H}_0$, wonach sich diese Formel einfach ausspricht:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \frac{12\,\Omega + 2\,\delta\mathfrak{H}_0}{12\,\Omega + 3\,\delta\mathfrak{H}_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 148)$$

Fig 88 a.



93. Unter Festhaltung vorstehender Regeln, wollen wir die grösste schiefe Spannung (Pressung) eines symmetrischen, doppel-⊤förmigen Trägers berechnen; die Dimensionen desselben sind aus beistehender Fig. 88 a. ersichtlich. Die grösste Spannung (Pressung) findet in der Mittelrippe zunächst der Gurtungsrippe statt. Es ist nun die grösste zulässige Längenspannung daselbst anzunehmen:

$$\mathfrak{N}_y = 500\,\frac{h}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I.$$

wenn Alles in Kilo und Centim. ausgedrückt ist. — Die horizontale Schubkraft findet sich nach Gleichung 45)

$$S_y = \frac{\Sigma Y}{\Theta} \int_y^{\mathfrak{b}} zy\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad II.$$

und durch Wertheinsetzung aus Gleichung 47) wo aber für z die Blechdicke δ zu setzen ist.

Horizontale Schubspannung ebendaselbst

$$\mathfrak{S}_y = \frac{\Sigma Y \int_y^b zy\ dy}{\delta \qquad \Theta} \quad \ldots\ldots \text{III.}$$

indem man nun für $\frac{\Sigma Y}{\delta} = \frac{\mathfrak{B}}{\delta}$ seinen Werth aus Gleichung 145) einsetzt und berücksichtigt, dass $\int_y^b zy\ dy$ das Moment des oberen Gurtungs-Querschnitt in Bezug auf die neutrale Axe ist, so erhält man

$$\mathfrak{S}_y = \frac{3}{2} \frac{b\,(H^2 - h^2)}{bH^2 - b,h^2} \cdot 350\,\mathfrak{H} \quad \ldots \text{IV.}$$

Setzen wir nunmehr $\frac{h}{H} = \frac{9}{10}$, $\frac{b_1}{b} = \frac{9}{10}$ so folgt daraus nach Gleichung 148) $\mathfrak{H} = 0{,}84\ H$ und durch Wertheinsetzung in Gleichung IV.

$$\mathfrak{S}_y = 245 \text{ Kilo} \quad \ldots\ldots\ldots \text{V.}$$

und aus Gleichung I.

$$\mathfrak{A}_y = \frac{h}{H} 500 \text{ Kilo} = 450 \text{ Kilo} \quad \ldots \text{VI.}$$

Indem man nun schliesslich die Werthe $\mathfrak{S}_y$ und $\mathfrak{A}_y$ aus Gleichung V. und VI. in die Gleichung 55) einsetzt, erhält man als grösste schiefe Spannung oder Pressung

$$\mathfrak{D}\ \max = \frac{450}{2} \pm \sqrt{245^2 + \left(\frac{450}{2}\right)^2} = 557 \text{ Kilo} \quad \text{VII.}$$

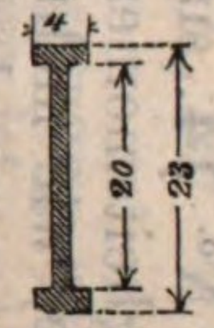
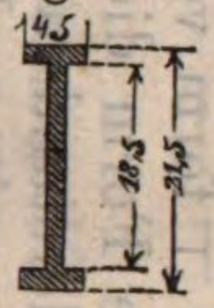
Diese Spannung fällt also innerhalb die Grenze, die wir oben zu 550—600 Kilo gesetzt haben.

Bei schlankeren Trägerquerschnitten wird $\mathfrak{D}$ max noch grösser, bei gedrückteren Profilen kleiner.

Die Mittelrippe ist ausserdem noch weiterhin in Anspruch genommen, wenn die Last oben aufgelegt ist; sie ist dann auf eine gewisse Länge einer Vertikalpressung ausgesetzt, welche wie am Schlusse von N°. **25.** bemerkt, bei Berechnung der grössten schiefen Pressung nicht mit in Rechnung genommen wurde; letztere Pressung ist also im Falle der aufgelegten Last etwas grösser als oben nach Gleichung 55) berechnet wurde. — Bei höheren Trägern wendet man desshalb besondere Vertikalstützen an, welche diese Last auf beide Gurtungen zu vertheilen haben.

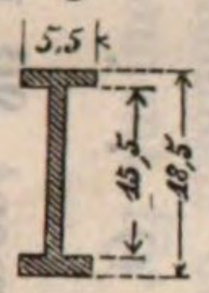
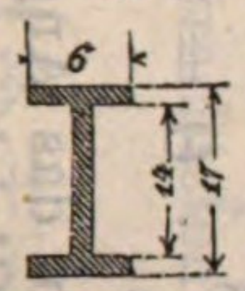
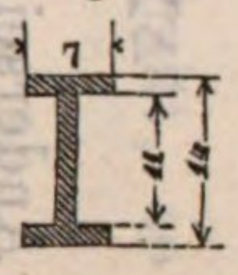
94. Am häufigsten kommt bei schmiedeisernen homogenen Trägern die doppel ⊤ form vor; in N°. **14.** sind für symmetrische und unsymmetrische Form die Trägheitsmomente Θ berechnet und findet man die Widerstandsmomente, wie mehrfach bemerkt, nach Gleichung 31). Zu weiterer Erleichterung der Rechnung ist nach-

Tabelle XXIX.

Dicke der Mittelrippe δ	0,5 c	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Gewicht des Trägers per lauf. Meter.	6,25 k	9,00	12,25	16,00	20,25	25,0	30,25	36,00	42,25	49,00	56,25	64,0	74,25	81,00
Fig. 89.  Höhe H =	11,5 c km	13,8 c km	16,1 c km	18,4 c km	20,7 c km	23,0 c km	25,3 c km	27,6 c km	29,9 c km	32,2 c km	34,5 c km	36,8 c km	39,1 c km	41,4 c km
δ ΣXy	111,66	193,05	306,56	457,60	651,54	893,77	1189,58	1544,40	1963,57	2452,45	3016,41	3660,80	4391,00	5212,35
Fig. 90.  H =	10,75	12,90	15,05	17,20	19,35	21,50	23,65	25,80	27,95	30,1	32,25	34,40	36,55	38,7
ΣXy	109,31	188,69	299,95	447,54	637,51	874,50	1163,69	1464,48	1921,27	2399,63	2951,44	3581,95	4296,42	5100,0
Fig. 91. H =	10,0	12,0	14,0	16,6	18,0	20,0	22,0	24,0	26,0	28,0	30,0	32,0	34,0	36,0
ΣXy	105,98	183,15	290,81	434,09	618,07	847,83	1128,46	1465,05	1862,68	2326,44	2861,43	3472,71	4165,39	4944,54

Anmerk. Die Spannung in den äussersten Längenfasern ist zu 500 K. per □Cent. angenommen.

Fortsetzung von Tabelle XXIX.

Dicke der Mittelrippe δ	0,5 c	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Gewicht des Trägers per lauf. Meter.	6,25 k	9,00	12,25	16,00	20,25	25,0	30,25	36,00	42,35	49,00	56,25	64,0	74,25	81,00
Fig. 92.  H =	9,25 c km	11,1 c km	12,95 c km	14,8 c km	16,65 c km	18,5 c km	20,35 c km	22,2 c km	24,05 c km	25,9 c km	27,75 c km	29,6 c km	31,45 c km	33,3 c km
ΣXy	101,72	175,76	279,1	416,61	603,39	813,72	1083,03	1406,07	1787,70	2252,78	2746,24	3332,91	3997,7	4745,50
Fig. 93.  H =	8,5	10,2	11,9	13,6	15,3	17,0	18,7	20,4	22,1	23,8	25,5	27,2	28,9	30,6
ΣXy	96,55	166,84	264,93	395,47	563,08	772,45	1028,06	1334,7	1701,07	2119,47	2606,85	3163,75	3794,80	4506,63
Fig. 94.  H =	7,0	8,4	9,8	11,2	12,6	14,0	15,4	16,8	18,2	19,6	21,0	22,4	23,8	25,2
ΣXy	83,43	144,29	229,12	342,02	486,97	667,97	889,11	1154,30	1500,60	1833,20	2344,5	2736,13	3281,88	3895,60

Anmerk. Die Spannung in den äussersten Längenfasern ist zu 500 K. per □Cent. angenommen.

stehende Tabelle XXIX. hergestellt; die berechneten Widerstandsmomente entsprechen einer grössten Längenspannung von 500 Kilo per □ Cent.; die Reduktion auf andere Spannungen ist mittelst Gleichung 31) leicht herzustellen d. h. die Widerstandsmomente sind den angenommenen Spannungen direkt proportional. — Die Dimensionen der Figuren 89—99 sind Vielfache der Dicke δ der Mittelrippe; die Gurtungsrippe ist durchweg $1^1/_2$ mal so dick angenommen als die Mittelrippen.

95. Ausser den Doppel ⊤ Eisen werden häufig auch Winkel- und einfache ⊤ Eisen als Träger angewendet. Das Trägheitsmoment findet sich, wenn man in Fig. 14. der N°. **14.** die Breite b_2 der untern Rippe $= \delta$ setzt. Doch wollen wir als Beispiel Trägheitsmoment, Widerstandsmoment und Spannungsverhältnisse für diesen Fall entwickeln.

Die Bezeichnungen sind aus beiliegenden beiden Figuren ersichtlich, wo s den Abstand des Schwerpunktes vom obern

Fig. 95.

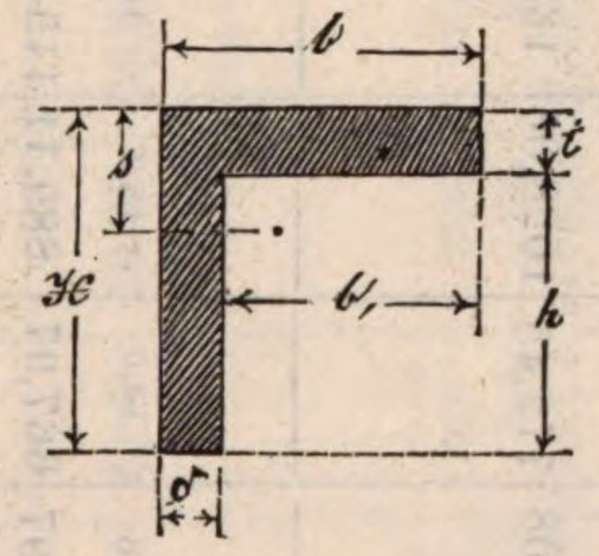
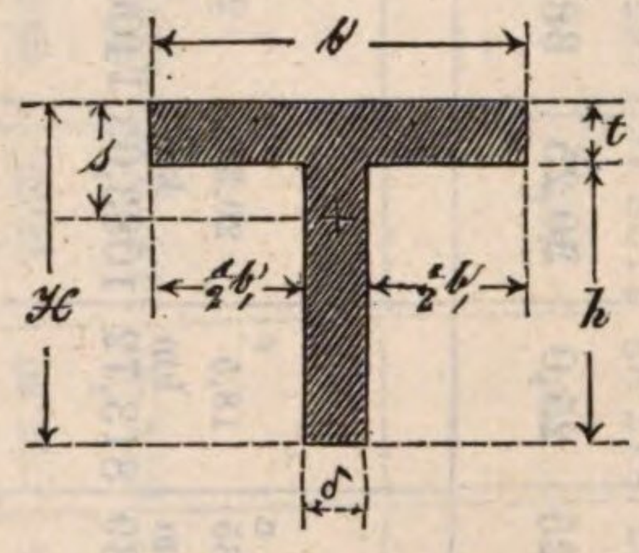


Fig. 96.



Rande der horizontalen Rippe bezeichnet; nach der Definition des Schwerpunkts ist:

$$s = \frac{b,t^2 + \delta H^2}{2\,(b,t + \delta H)} \quad \ldots\ldots\ldots \text{I.}$$

und das Trägheitsmoment findet sich nun nach Anleitung des Schlusses von N°. **14.**

$$\Theta = \frac{1}{3}\left\{ b,(s^3 - (s-t)^3) + \delta(s^3 + (H-s)^3) \right\} \text{II.}$$

Diese Gleichungen sind für die beiden Figuren 95. und 96. in gleicher Weise gültig; der Querschnitt sei oben gepresst, unten gespannt, und es bezeichnen

$\mathfrak{B}$ die Pressung in der äussersten Faser der Horizontalrippe,

$\mathfrak{A}$ die Spannung in den untersten Fasern der Mittelrippen, so ist das Widerstandsmoment ΣXy nach Gleichung 31)

$$\Sigma Xy = \frac{\mathfrak{B}}{s} \cdot \Theta = \frac{\mathfrak{A}}{H - s}\,\Theta \quad \ldots\ldots \text{III.}$$

Anderseits wenn das Angriffsmoment $\mathfrak{M}$ bekannt ist, findet sich nach derselben Gleichung 31)

$$\text{grösste Pressung } \mathfrak{B} = \mathfrak{M} \cdot \frac{s}{\Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \text{ IV.}$$

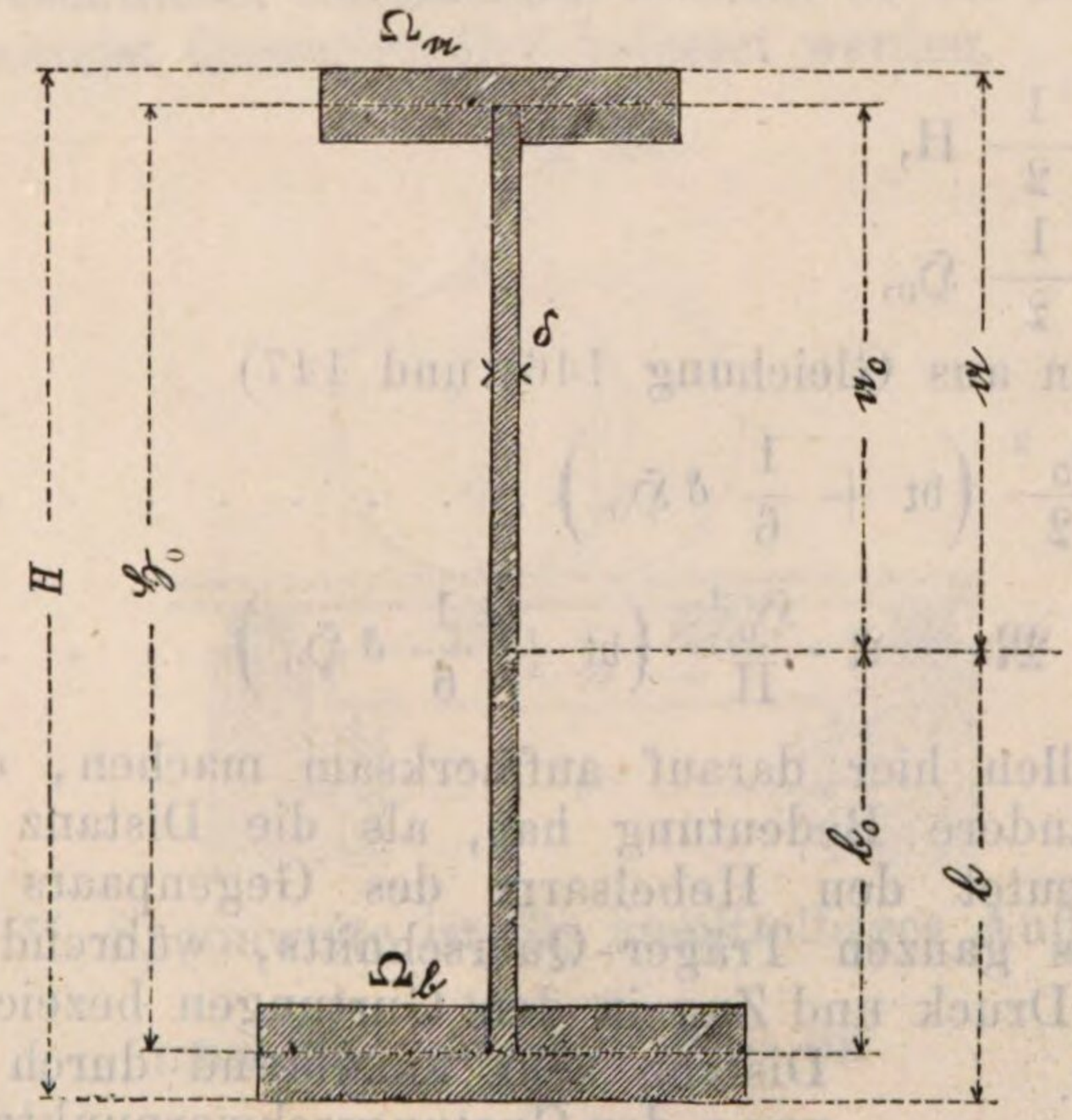
$$\text{grösste Spannung } \mathfrak{A} = \mathfrak{M} \frac{H - s}{\Theta} \quad . \quad . \text{ V.}$$

wo s und Θ aus obigen Gleichungen I. und II. einzusetzen sind.

96. Für sämmtliche Träger-Querschnitte, welche beiderseits mit Gurtungsrippen versehen sind, sind die Näherungsformeln 38) und 39) gültig. — Da in denselben Seite 25 (wie in den Druckfehlern bemerkt) die Grössen a_0 und b_0 aus Versehen weggeblieben sind (ohne dass sich dieser Verstoss auf die vorangehende Entwicklung erstreckte), so bringen wir diese Gleichungen vervollständigt hier nach:

Bezeichnen ausser den aus Fig 18. ersichtlichen Dimensionen:

Fig. 18.

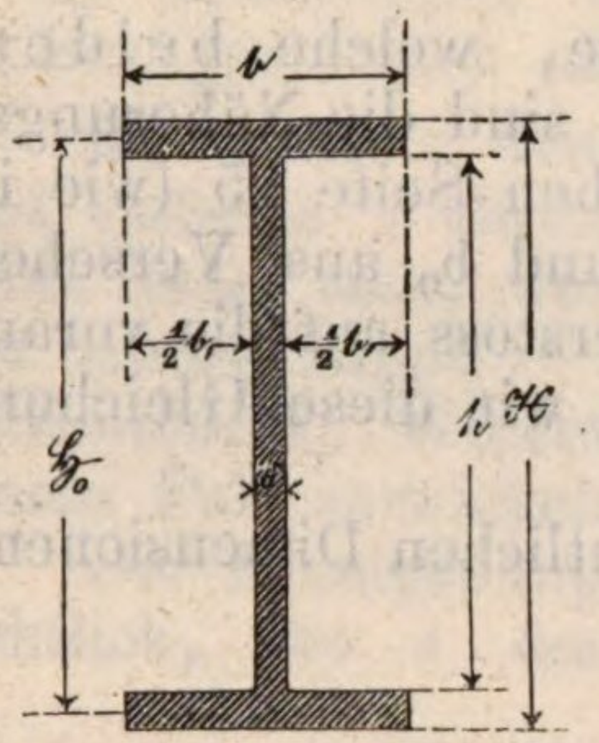


$\mathfrak{A}$ die grösste Spannung in den äussersten Längenfasern,
$\mathfrak{B}$ die grösste Pressung in den entgegengesetzten äussersten Fasern,
$\mathfrak{H}_0$ die Distanz der Schwerpunkte der Gurtungen (als Mittelpunkte der dortigen Zug und Druck-Resultanten), sowie
Θ das Trägheitsmoment des ganzen Körpers,
$\mathfrak{M}$ das Angriffsmoment für den betrachteten Querschnitt, so ist nach N°. **16.**:

$$\Theta = \mathfrak{H}_0 a_0 (\Omega_a + \tfrac{1}{3} \delta a_0) = \mathfrak{H}_0 b_0 \left(\Omega_b + \frac{1}{3} \delta b_0\right) \quad . \quad . \quad . \quad 149)$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}} \mathfrak{H}_0 \mathfrak{a}_0 \left(\Omega_a + \frac{1}{3} \delta \mathfrak{a}_0 \right) = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}} \mathfrak{H} \mathfrak{a}_0 \left(\Omega_b + \frac{1}{3} \delta \mathfrak{b}_0 \right)$$
$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}} \mathfrak{H} \mathfrak{b}_0 \left(\Omega_a + \frac{1}{3} \delta \mathfrak{b}_0 \right) = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}} \mathfrak{H} \mathfrak{b}_0 \left(\Omega_b + {}^1/_3 \delta \mathfrak{a}_0 \right) \Bigg\} 150)$$

Fig. 88 a.



Für symmetrische doppel⊤förmige Querschnitte ist diese Gleichung ganz genau (vergl. Gleichung 37); nennt man nun

b die Breite der Gurtungsrippe,
t die Höhe derselben,
H die ganze Trägerhöhe,
h die lichte Entfernung der Gurtungen
$\mathfrak{H}_0 = \frac{H + h}{2}$ die Distanz der Gurtungsschwerpunkte;

bedenkt man ferner dass:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} = \frac{1}{2} H,$$
$$\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_0 = \frac{1}{2} \mathfrak{H}_0,$$

so erhält man aus Gleichung 146) und 147)

$$\Theta = \frac{\mathfrak{H}_0^{\,2}}{2} \left(\mathfrak{b}t + \frac{1}{6} \delta \mathfrak{H}_0 \right) \ldots\ldots\ldots 151)$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \frac{\mathfrak{H}_0^{\,2}}{H} \left(\mathfrak{b}t + \frac{1}{6} \delta \mathfrak{H}_0 \right) \ldots 152)$$

Wir wollen hier darauf aufmerksam machen, dass $\mathfrak{H}_0$ eine wesentlich andere Bedeutung hat, als die Distanz $\mathfrak{H}$; letztere Grösse bedeutet den Hebelsarm des Gegenpaars von Druck und Zug des ganzen Träger-Querschnitts, während das $\mathfrak{H}_0$ die Distanz von Druck und Zug in den Gurtungen bezeichnet, welche Distanz sehr annähernd durch die Entfernung der Gurtungsschwerpunkte repräsentirt wird; vergl. N°. **92**.

Fig. 97.

Die sehr genaue Gleichung 152) lässt eine bequeme Näherung zu; bedenkt man dass $\mathfrak{H}_0 = H - t$, so ist $\frac{\mathfrak{H}_0^{\,2}}{H} = H - 2t + \frac{t^2}{H}$ und mit Vernachlässigung des letzteren Glieds $= h$ woraus

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \,.\, h \left(bt + \frac{1}{6} \delta \,(h + t) \right) \ldots\ldots 153)$$

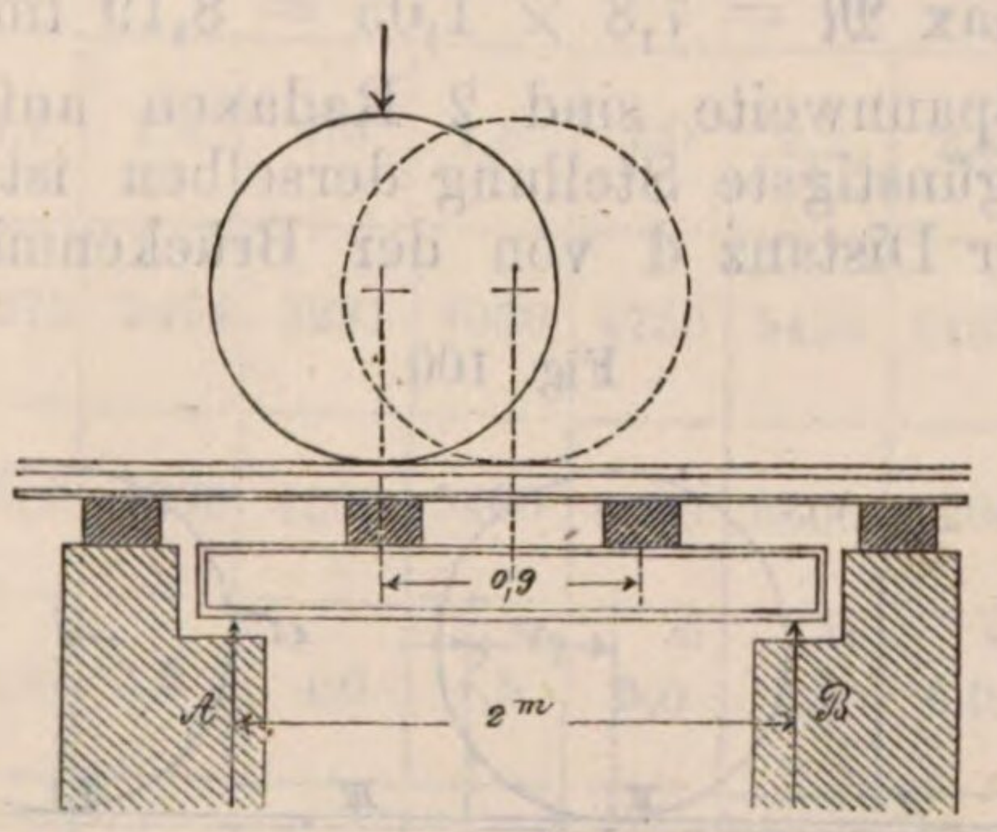
der Fehler der durch diese Annäherung gemacht wird, beträgt $^1/_5$—$^1/_2$ %, je nachdem der Trägerquerschnitt schlanker oder gedrückter ist.

Wenn in vorstehenden Formeln 149)—153) Alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt ist, so soll $\mathfrak{A}$ nicht grösser als 500 genommen werden.

97. Die schmiedeisernen homogenen Träger werden hauptsächlich zur Ueberbrückung kleinerer Spannweiten von 1,5—4 M. angewendet.

Bei Eisenbahnbrücken sind meist für jeden Schienenstrang je ein Träger, somit für jedes Geleise 2 Träger vorhanden; wir nehmen aber auch hier wieder die Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ immer für 1 Geleise. — Wie oben rechnen wir per Radaxe 12 tons Gewicht und nehmen die Distanz zweier Triebaxen = 2 M. an. — Wir wollen hienach die Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ für eine Reihe von Trägerpaaren von verschiedener Spannweite berechnen, wobei aber ein wesentlicher Unterschied besteht, ob die Träger unmittelbar oder mittelst Querschwellen belastet werden.

Fig. 98.



Bei 2 M. Spannweite ist für unmittelbares Auflager

$$\max \mathfrak{M} = \frac{12 \,.\, 2}{4} = 6 \text{ tm}$$

bei Anwendung von Querschwellen findet das grösste Angriffsmoment dann statt, wenn die Axe gerade auf einer Querschwelle sich befindet; es ist

$$\text{Auflagerdruck } A = \frac{12 \,.\, 1{,}45}{2{,}00} = 8{,}7 \text{ ts}$$

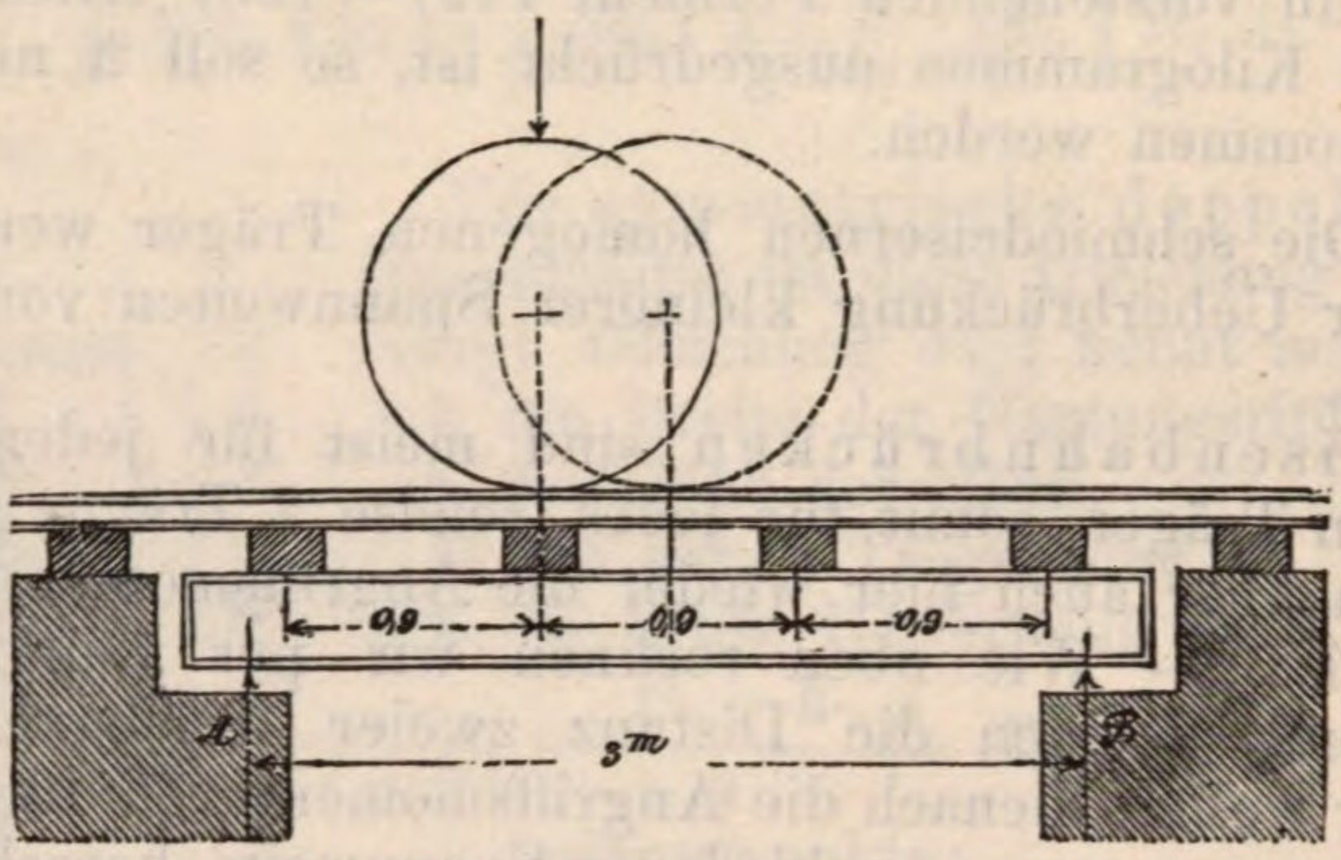
$$\max \mathfrak{M} = 8{,}7 \times 0{,}55 = 4{,}785 \text{ tm}$$

bei 3 M. Spannweite ist für unmittelbare Auflager

$$\max \mathfrak{M} = \frac{12 \,.\, 3}{4} = 9 \text{ tm.}$$

bei Anwendung von Querschwellen findet das grösste Angriffsmoment wiederum dann Statt, wenn die Radaxe unmittelbar über

Fig. 99.



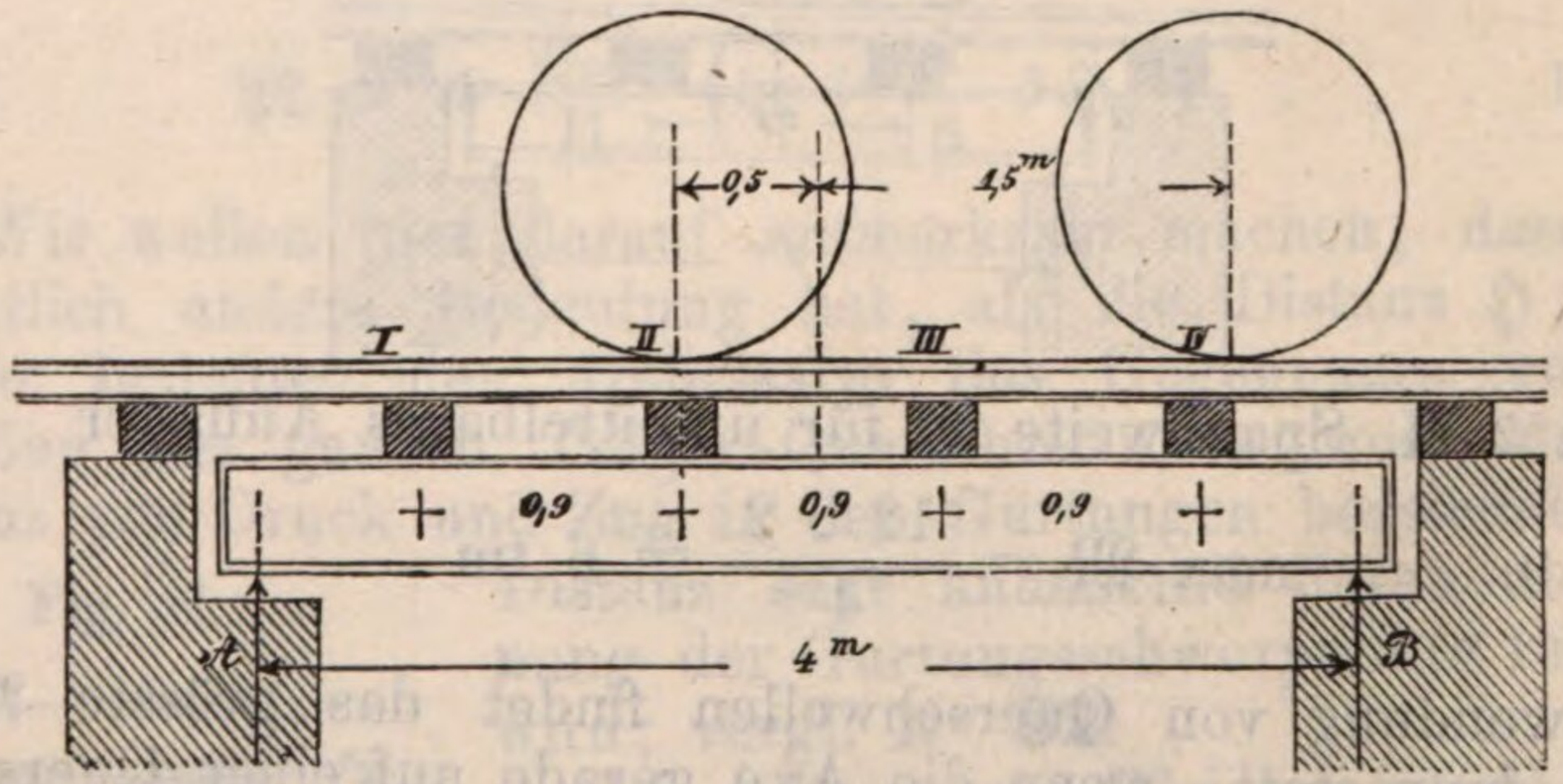
einer Querschwelle steht, hiefür ist

$$\text{Auflagerdruck } A = \frac{12 \,.\, 1{,}95}{3{,}0} = 7{,}8 \text{ ts}$$

$$\max \mathfrak{M} = 7{,}8 \times 1{,}05 = 8{,}19 \text{ tm}.$$

Bei 4 M. Spannweite sind 2 Radaxen auf die Brücke zu rechnen; die ungünstigste Stellung derselben ist, wenn das eine Rad um $^1/_4$ ihrer Distanz d von der Brückenmitte entfernt ist;

Fig. 100.



hiefür ist das Angriffsmoment bei unmittelbarer Auflage nach Fall 13 der Tabelle XXVIII.

$$\max \mathfrak{M} = \frac{P\,(2l - d)^2}{8l} = \frac{12 \,.\, 36}{32} = \frac{27}{2} = 13{,}5 \text{ tm}.$$

Bei Anwendung von Querschwellen ist bei gleicher Axenstellung die Schwelle II mit 11,33 ts Schwelle I mit 0,67 ts die Schwelle IV mit 10 ts belastet anzunehmen, und folgt daraus

Auflagerdruck

$$A = \frac{2{,}45 \;.\; 11{,}33}{4} + \frac{0{,}67 \times 3{,}35}{4} + \frac{0{,}65 \;.\; 10}{4} = 9{,}125 \text{ ts}$$

$$\text{Max } \mathfrak{M} = 9{,}125 \;.\; 1{,}50 - 0{,}67 \;.\; 0{,}85 = 13{,}12 \text{ tm}$$

die Differenz von 0,38 tm ist in den Schienen enthalten, insofern die Radaxen nicht unmittelbar über den Schwellenmitteln sich befinden. Wäre jedoch das eine Rad unmittelbar über Schwelle II gestellt worden, so wäre max $\mathfrak{M} = 13{,}5$ tm geworden, d. h. ebenso gross als beim directen Auflager; es ist überhaupt durch die Querschwellen-Eintheilung keine Verminderung des Angriffsmomentes zu erwarten, wenn 2 Radaxen gleichzeitig auf die Brücke zu stehen kommen. — Unter dieser Voraussetzung ist nachstehende Tabelle XXX. gerechnet, welche für jede Spannweite das per Geleise antreffende max $\mathfrak{M}$ in Kilogramm-Metern ergibt. — Die entsprechenden Widerstandsmomente doppel⊤förmiger Träger sind in Tabelle XXIX. enthalten.

Tabelle XXX.

Spannweite:		1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	3,0
max $\mathfrak{M}$	mit Querschwellen.	1575	2464	3281	4050	4750	5495	6187	7200	8190
	direkt aufliegend.	3600	4200	4800	5400	6000	6600	7200	8100	9000
Spannweite:		3,3	3,6	4,0	4,5 m	5,0 m	5,5 m	6,0 m	6,5 m	7,0 m
max $\mathfrak{M}$	mit Querschwellen.	9163	10025	13500	16333	21000	25500	30000	34500	39000
	direkt aufliegend.	9900	10900							

Die Momente der Tabelle XXX. beziehen sich durchweg auf ein Geleise; wenn also wie gewöhnlich zwei Träger per Geleise vorhanden sind, so sind diese Werthe zu halbiren; für die auf einen Träger reduzirten Angriffsmomente der Tabelle XXX. ist dann aus Tabelle XXIX. ein passendes Widerstandsmoment auszusuchen, das dem ersteren numerisch gleich sein soll. Hat ein Träger andere Dimensionen als sein Angriffsmoment verlangt, so lässt sich mit Hülfe der Tabelle XXIX. die grösste Längenspannung schnell auffinden, indem in der genannten Tabelle eine

Längenspannung von 500 Kilo angenommen ist und die Widerstandsmomente der jeweils herrschenden grössten Längenspannung direkt proportional sind.

Die grösste Vertikalkraft findet nicht gleichzeitig Statt, sondern stets dann, wenn das Vorderrad der Lokomotive am Brückenende angelangt ist, während von den übrigen Lokomotivrädern so viele auf der Brücke sich befinden, als die Länge der letzteren gestattet. — Hiernach ist die folgende Tabelle XXXI. für die grössten Werthe der Vertikalkraft $\mathfrak{V}$ berechnet. — Die Axenbelastung der Lokomotive ist wieder 12000 K. und die Axendistanz 2 M.; die Werthe $\mathfrak{V}$ beziehen sich auf ein Geleise, so dass in der Regel auf einen Träger die Hälfte dieser Last zu rechnen ist.

Tabelle XXXI.

Spannweite:	2,0 m	2,2 m	2,4 m	2,7 m	3,0 m	3,3 m	3,6 m
Max $\mathfrak{V}$	12000	13091	14000	15111	16000	16727	17333
Spannweite:	4,0 m	4,5 m	5,0 m	5,5 m	6,0 m	6,5 m	7,0 m
Max $\mathfrak{V}$	18000	20000	21600	22909	24000	24923	25714

Für alle Weiten unter 2 M. ist Max $\mathfrak{V}$ gleich 12000 k per Geleise zu rechnen. In Tabelle XXXI. ist vorausgesetzt, dass die Träger unmittelbar belastet sind; werden besondere Schwellenträger angewendet, so geht ein Theil der Vertikalkraft durch dieselben direkt auf die Widerlager über; letztere Last muss von den Werthen der Tabelle XXXI. in Abzug gebracht werden.

98. Gusseiserne Träger werden seltener angewendet, da ein Bruch durch Erschütterungen leicht hervorgerufen werden kann und schmiedeiserne Träger sehr billig und in mannigfaltigen Formen hergestellt werden.

Das Gusseisen zeigt die Eigenthümlichkeit, dass der Elastizitätsmodul bei stärkeren Belastungen sich sehr ändert und für Druck und Zug nicht mehr derselbe ist (vergl. Tab. IV. u. V.) Innerhalb den bei Brückenbauten zulässigen Belastungen sind jedoch beide Elastizitätsmodule nahezu gleich und haben wir als Mittelwerth 900000 K. per □ Centim. gesetzt.

Da die absolute Festigkeit des Gusseisens 5—6 mal kleiner ist als seine absolut rückwirkende Festigkeit, so kommt bei homogenen Trägern nur erstere in Betracht und lautet hienach Gleichung 31).

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}}{a}\ \Theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 31)$$

Ist alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt, so soll $\mathfrak{A}$ gewöhnlich nicht grösser als 200 genommen werden; es gibt jedoch Gusseisen besonders guter Qualität, wo grössere Längen-Spannungen bis zu 250 K. per □ Cent. erlaubt ist.

Da die rückwirkende Festigkeit des Gusseisens die absolute Festigkeit so sehr übersteigt, so gibt man häufig den beiden Flantschen verschiedene Querschnitte, indem man die gedrückte Gurtungsrippe viel kleiner herstellt. — Für solche unsymmetrische Querschnitte mit dünnen Mittelrippen hat E. Hodgkinson folgende empirische Formel gegeben:

$$P = C.\frac{ah}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ 154)$$

hiebei bezeichnet:

l die Länge eines an beiden Enden frei aufliegenden Stabes,
h die Höhe desselben,
a den Querschnitt der gezogenen Flantsche,
P das Gewicht, das in der Mitte des Stabs wirkend den Bruch hervorbringt,

und ist, wenn Alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt ist,

$$C = 4100 \text{ Kilo},$$

woraus Bruchmoment:

$$\mathfrak{M}_0 = 1025 \,.\, a \,.\, h \quad \ldots\ldots\ 154^a)$$

Wenn man von diesem Bruchgewicht wie in Tabelle XII. ein Fünftel als zulässige Last rechnet, so stimmt Gleichung 154^a) ziemlich gut mit den Resultaten der Gleichung 31) trotzdem dass die Versuche Hodgkinsons bis zum Bruch fortgesetzt sind, wo beim Gusseisen jedenfalls ganz eigenthümliche Formänderungen vor sich gehen; bei Versuchen mit symmetrischen Trägern hat man auch ein wesentlich höheres Bruchgewicht erhalten; innerhalb den zulässigen Belastungen sind aber die Gleichungen 31) und 154^a) durchaus anzuwenden; letztere Gleichung selbstverständlich nur für Doppel⊤form mit dünner Mittelrippe.

Die Dicke der Mittelrippe bestimmt sich wie beim schmiedeisernen homogenen Träger nach Gleichung 46) und 47) indem für die horizontale Schubspannung in der neutralen Faser ein bestimmtes Maass gesetzt wird.

Bezeichnet

$\mathfrak{S}_0$ die Schubspannung in der neutralen Faser,
δ die Dicke der Mittelrippe,
$\mathfrak{V}$ die zu übertragende Vertikalkraft,
$\mathfrak{H}$ die Distanz der Mittelpunkte von Druck und Zug,

so ist nach Gleichung 46) und 47)

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 155)$$

Ist alles in Kilogrammen und Centimetern ausgedrückt, so soll bei gewöhnlichem gutem Guss $\mathfrak{S}_0$ nicht grösser als 150 genommen werden, woraus folgt

$$\delta \geqq \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} \cdot \frac{1}{150} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 156)$$

Es kann bei gleichem Gewicht einem gusseisernen Träger an Last etwa $^1/_3 - ^3/_7$ gegenüber einem schmiedeisernen Träger von gleicher Höhe auferlegt werden.

99. Hölzerne homogene Träger haben meist rechteckige Querschnittform, — wodurch Gleichung 31) sich wesentlich vereinfacht.

Bezeichnet
h die Höhe des Trägers
b die Breite desselben,
$\mathfrak{M}$ das Angriffsmoment,
$\mathfrak{A}$ die grösste Längenspannung,
so ist

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{M}}{^1/_6 bh^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 157)$$

Ist alles in Kilogrammen und Centimetern ausgedrückt, so soll $\mathfrak{A}$ nicht grösser als 70 K. genommen werden. — Es ist diess übrigens ein Mittelwerth, da die Hölzer nach Gattung, Behandlung und Alter verschiedene Festigkeit haben; es ist angenommen, dass $^1/_{10}$ der Bruchfestigkeit durch die zulässige Belastung erreicht werde.

§. 11. Die Blechwandbrücken.

100. Die Blechwandbrücken unterscheiden sich von den schmiedeisernen homogenen Trägern hauptsächlich dadurch, dass sie aus einzelnen Theilen — Wandblechen, Kopfblechen, Winkeln etc. — zusammengesetzt sind; in Folge dessen ist ihre Anfertigung bezüglich Grösse und Form beinahe unbeschränkt; sämmtliche Theile können meist gerade so stark gewählt werden, als ihre Bestimmung es nothwendig macht.

Zur Bestimmung der Stärke der Gurtungen und Wandbleche dienen bei horizontal und geradlinig begränzter Trägerform dieselben Formeln wie für die homogenen Träger.

Bezeichnet für einen Querschnitt x:
$\mathfrak{M}$ das Angriffsmoment der äussern Kräfte,
$\mathfrak{V}$ die Vertikalkraft,

$\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) die grösste horizontale Längenspannung (Pressung) in den äussersten Fasern,
$\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{b}$) der Abstand der äussersten gespannten (gepressten) Längenfasern von der neutralen Schichte,
$\mathfrak{a}_0$ ($\mathfrak{b}_0$) der Abstand des Schwerpunkts der gezogenen (gepressten) Gurtung von der neutralen Schichte,
$\mathfrak{H}_0$ die Distanz der beiden Gurtungsschwerpunkte,
$\mathfrak{H}$ die Distanz der Mittelpunkte von Druck und Zug,
$\mathfrak{O}$ das Trägheitsmoment des Querschnitts,
δ die Dicke des Mittelwandbleches,
Ω_a (Ω_b) den Querschnitt der gezogenen (gedrückten) Gurtung,
$\mathfrak{S}_0$ die Schubspannung in der neutralen Faser,
so ist nach Gleichung 31)

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{O} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{O} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 31)$$

die Bestimmung des Trägheitsmoments $\mathfrak{O}$ ist bei complicirteren Querschnitten oft sehr zeitraubend; es wird daher mit Vortheil die Näherungsformel aus N°. **96.** angewendet:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{H}_0\,\mathfrak{a}_0\,(\Omega_a + {}^1/_3\,\delta\mathfrak{a}_0) \\ \mathfrak{M} &= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{H}_0\,\mathfrak{b}_0\,(\Omega_a + {}^1/_3\,\delta\mathfrak{b}_0) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 150)$$

Gemäss Gleichung 31) darf $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$ jederzeit durch $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$ ersetzt werden und umgekehrt; bei ganz oder nahezu symmetrischen Querschnitten ist diese Näherungsformel vollständig genau, und geht in die Gleichung über:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\,\frac{\mathfrak{H}_0^{\,2}}{\mathfrak{H}}\,(\Omega_a + {}^1/_6\,\delta\mathfrak{H}_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 158)$$

welche Gleichung mit Formel 152) identisch ist.

Ist alles in Kilogrammen und Centimetern ausgedrückt, so soll $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ nicht grösser als 600 Kilo genommen werden.

Anmerkung. Dies gilt auch, wenn alle Längen und Höhen, und somit auch $\mathfrak{M}$ in Metern (oder überhaupt andern Längenmaassen) ausgedrückt sind, wenn nur die Ausdrücke $(\Omega_a + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{a}_0)$ und $(\Omega_b + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{b}_0)$ nach Centimet. berechnet sind.

Zur Bestimmung der Dicke der Mittelrippe hat man nach N°. **92.** Gleichung 144)

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 144)$$

wobei wir auf die Bestimmung von $\mathfrak{H}$ in N°. **92.** verweisen.

Ist alles in Kilogrammen und Centimetern ausgedrückt, so soll $\mathfrak{S}_0$ nicht grösser als 350 genommen werden. Hieraus folgt

$$\delta \geqq \frac{1}{350} \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 145)$$

101. Bei Trägern mit gebogenen oder überhaupt nicht parallelen Gurtungen müssen obige Formeln einige Modificationen erleiden, indem wir uns einen Querschnitt denken, der auf allen Längenfasern normal steht. — Bezeichnen wir mit

Q' die Kraft in der gezogenen Gurtung,
Q_y' die vertikale Composante dieser Kraft,
α' den Winkel der die gezogene Gurtung mit dem Horizont bildet,
Ω_a den Querschnitt der gezogenen Gurtung senkrecht zur Gurtungsrichtung,

und ebenso

Q'' die Kraft in der gedrückten Gurtung,
Q_y'' die vertikale Composante dieser Kraft,
α'' den Winkel den die gedrückte Gurtung mit dem Horizont bildet,
Ω_b den Querschnitt der gedrückten Gurtung senkrecht zur Gurtungsrichtung,

so ist nach Gleichung 150), indem der Hebelsarm der Zugresultante $= \mathfrak{H}_0 \cos \alpha'$ gesetzt wird:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}} \mathfrak{H}_0 \cos \alpha' \, (\Omega_a + {}^1/_3 \, \delta \mathfrak{a}_0) \quad \ldots 159)$$

ferner ist

$$Q' = \Omega_a \, . \, \mathfrak{A} \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I.}$$

und folgt aus I. und 159)

$$Q' = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}_0 \cos \alpha'} - \frac{1}{3} \delta \mathfrak{a}_0 \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}} \mathfrak{A} \quad \ldots \text{II.}$$

$$Q_y' = \sin \alpha' \left\{ \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}_0 \cos \alpha'} - \frac{1}{3} \delta \mathfrak{a}_0 \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}} \mathfrak{A} \right\} \quad \text{III.}$$

und ebenso ist (nach Gleichung 150)

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{B} \frac{\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{b}} \mathfrak{H}_0 \cos \alpha'' \, (\Omega_b + {}^1/_3 \, \delta \mathfrak{b}_0) \quad . \; 159^a)$$

$$Q'' = \Omega_b \, \mathfrak{B} \frac{\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{IV.}$$

wonach aus 159^a) und IV. folgt:

$$Q'' = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}_0 \cos \alpha''} - \frac{1}{3} \delta \mathfrak{b}_0 \frac{\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{b}} \mathfrak{B} \quad \ldots\ldots \text{V.}$$

$$Q_y'' = \sin\alpha'' \left\{ \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}_0 \cos\alpha''} - \frac{1}{3}\,\delta b_0\,\frac{b_0}{b}\,\mathfrak{B} \right\} \quad . \text{ VI.}$$

Die bestehende grösste Gurtungsspannung $\mathfrak{A}$ (oder Pressung $\mathfrak{B}$) wird nach obiger Gleichung 159), beziehungsweise 159[a]) berechnet; ist Alles in Kilogrammen und Centimetern ausgedrückt, so soll $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ nicht grösser als 600 genommen werden.

Zur Bestimmung der Schubspannung in der Wand müssen die vorstehend entwickelten Gleichungen IV. und VI. zu Hilfe genommen werden.

Da nämlich ein Theil der Vertikalkraft durch die vertikalen Composanten der Gurtungskräfte aufgenommen wird, so ist die durch die Schubkräfte des Vertikalschnittes aufzunehmende Kraft $\mathfrak{V}_1$ um so viel kleiner, und zwar ist

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V} - Q_y' - Q_y'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \text{ VII.}$$

woraus für die horizontale Schubkraft in der neutralen Faser folgt:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\mathfrak{V} - Q_y' - Q_y''}{\mathfrak{H}\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 160)$$

wo Q_y' und Q_y'' aus obigen Gleichungen III. und VI. zu entnehmen sind.

Ist alles in Centimeter und Kilogramme ausgedrückt, so soll $\mathfrak{S}_0$ nicht grösser als 350 sein, wornach

$$\delta \geqq \frac{1}{350}\,\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V} - Q_y' - Q_y''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 161)$$

bei Bestimmung der Wanddicke müssen gleichzeitige Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ in Rechnung genommen werden, da letztere Grösse für die Werthe Q' und Q'' maassgebend ist.

102. Bei den vorstehenden Regeln ist durchaus vorausgesetzt, dass die Abzüge für die Nietlöcher oder ungenügende Stossverbindungen bereits vorgenommen worden sind. — Im Allgemeinen ist hiebei auf die Zusammenstellung in N°. **55.** zu verweisen, wo die Regeln über Nietverbindungen kurz zusammengefasst sind, es lassen sich jedoch einige weitere Betrachtungen anreihen.

Die Nieten, mit denen die einzelnen Theile der Gurtungen verbunden werden, werden schon dieses Zweckes halber meist so nahe zusammengerückt und von solcher Stärke hergestellt, dass an den Stössen kaum eine weitere Verschwächung nothwendig wird. — Diess kann insbesondere noch dadurch erreicht werden, dass die Nieten zunächst dem Stossplattenrande ganz gleich den auf die ganze Länge durchlaufenden Nieten hergestellt werden und erst die innern Nietreihen — welche nicht mehr die ganze Kraft zu übertragen haben, mit stärkern oder zahlreichern Nieten

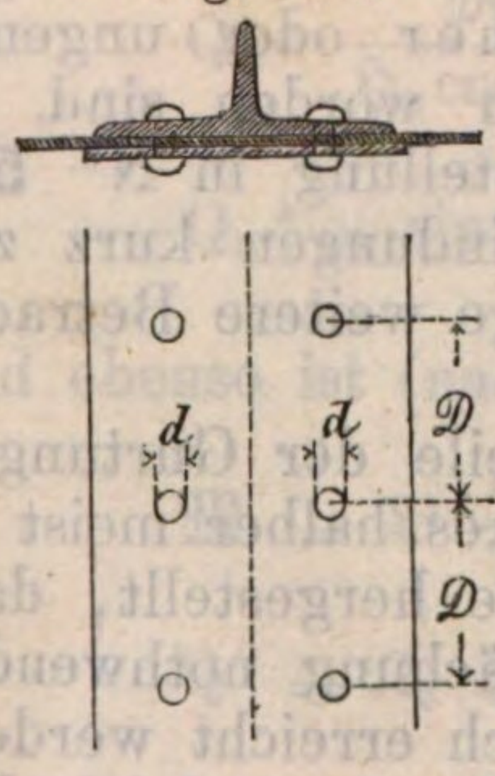
versehen werden; für die Verschwächung des gestossenen Bleches ist nur die dem Stossplattenrande zunächst befindliche Nietreihe maassgebend (siehe N°. **55**.).

Ob ein beliebiger Stoss genügend hergestellt ist, wird nach Anleitung von N°. **55**. untersucht; im Allgemeinen soll Stossplatte oder Niete nicht mehr in Anspruch genommen sein, als das gestossene Blech; ist jedoch letzteres stärker als nothwendig wäre, so genügt für den Stoss die der Widerstandsfähigkeit des Nietbolzenmaterials entsprechende Stärke.

103. Die Stösse der Blechwand erfordern eine besondere Beurtheilung. — Die Stärke der Blechwand, wie sie nach den Formeln 145) und 161) berechnet wird, ist meist geringer, als in der Ausführung rathsam erscheint; mit Rücksicht auf das Einknicken zu dünner Bleche sowie auf die Witterungseinflüsse darf, unter ein gewisses Minimum (das mit der Trägerhöhe wechselt) nicht gegangen werden; im Allgemeinen wird nur bei kleinen oder sehr grossen Brücken die Dicke der Mittelrippe genau nach der Gleichung 145) bemessen werden können; in den meisten Fällen hat also die Wand eine übermässige Stärke gegen Abscheeren. — Es kann aber ganz allgemein der für einen vertikalen Wandstoss nothwendige Nietenabstand unabhängig von der Blechwanddicke berechnet werden. — Es ist hiefür die horizontale Schubkraft in der neutralen Faser maassgebend (nach Gleichung 48.) ist in demselben Wandelement horizontale und vertikale Schubkraft per Längeneinheit gleich gross). — Die horizontale Schubkraft in der neutralen Faser ist nach Gleichung 46) per Längeneinheit:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\Sigma Y}{\mathfrak{H}} = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

Fig. 101.



wo $\mathfrak{H}$ den Abstand der Mittelpunkte von Druck und Zug des ganzen Querschnitts bezeichnet. Diese Kraft nimmt bis zu den Gurtungen hin wenig ab und wird daher auf die ganze Höhe constant angenommen; es muss daher diese Kraft durch die per Längeneinheit angebrachten Wandnieten übertragen werden; diese Nieten sind als doppelschnittig zu rechnen, da stets beiderseits Stossplatten (oder ⊤Eisen) angebracht sind; bezeichnet

d den Durchmesser der Nietbolzen,
$\mathfrak{C}$ die zulässige Schubspannung derselben,
n die Anzahl der Nieten per Längeneinheit,

D die Distanz der Nieten, welche $\frac{1}{n}$ der Längeneinheit beträgt,

so folgt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_0 &= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} = 2n. \frac{d^2\pi}{4} . \mathfrak{C} \\ D &= \mathfrak{C} \frac{2\mathfrak{H}}{\mathfrak{B}} . \frac{d^2\pi}{4} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 162)$$

Ist alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt, so soll $\mathfrak{C}$ nicht grösser als 600 genommen werden. (Es ist gestattet $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ gleichzeitig anstatt in Centimetern in andern Maassen z. B. in Metern auszudrücken.) Hiebei ist jedoch sehr gutes Nieteisen und gute Ausführung vorausgesetzt.

Wird die Stärke der Blechwand durch den Widerstand gegen Abscheeren bedingt, somit nach Formel 145) bestimmt, so ist für die Verschwächung durch die Nieten ein Zuschlag in der Blechdicke zu geben, den wir uns durch eine vorläufige Rechnung gemacht denken; diese Rechnung geschieht dadurch dass man Entfernung, beziehungsweise Durchmesser der Nieten nach Gleichung 162) aufsucht. Ist nun die Dicke des Bleches (unter Berücksichtigung der Abzüge für Nietlöcher) nach Gleichung 145) berechnet, so kann hieraus der Abstand der Nieten direkt gefunden werden; da nämlich in letzterer Formel 145) die Wanddicke so bemessen ist, dass die Schubspannung im Blech 350 K. beträgt, während für die Niete 600 Kilo pro □ Cent. zulässig ist, so ist auf die Distanz D zweier Nieten (unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen)

Widerstand eines

$$\text{Nietbolzen} = 2 . 600 . \frac{d^2\pi}{4} . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Widerstand des zwischen liegenden

$$\text{Wandtheils} = (D - d)\, \delta . 350 \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

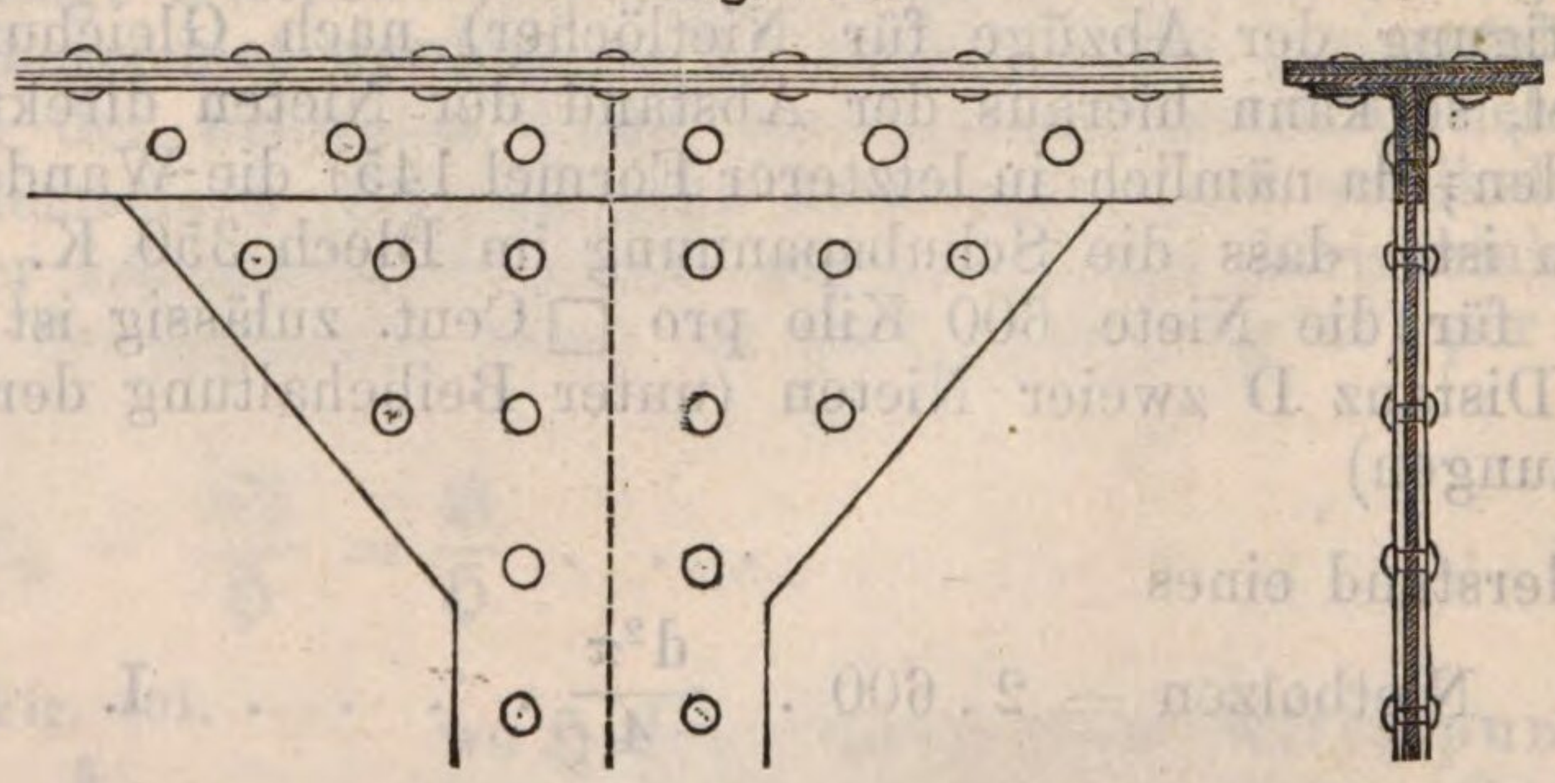
und folgt aus I. und II.

$$D = \frac{\pi d^2 + 1{,}16\ \delta\ d}{1{,}16\ \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 163)$$

Ist z. B. $d \doteq 2\delta$, so folgt $D = 6{,}3d$, so dass in diesem Falle das Blech um $\frac{1}{6{,}3}$ verschwächt wird. — Die Gleichungen 162) und 163) geben denselben Abstand D, wenn der Nietendurchmesser d beidemale gleich gross ist, vorausgesetzt, dass in letzterem Falle δ nach Gleichung 145) berechnet ist.

Wie schon angedeutet, sind diese Betrachtungen in der Nähe der Gurtungen nicht mehr zutreffend. — Es hat daselbst die Wand bei der Biegung die Bewegung des ganzen Trägers mitzumachen und in Folge dessen sind die Theile zunächst der Gurtung mit einer Längenspannung behaftet, welche der Spannung in den äussersten Längenfasern nur wenig nachsteht und nach obigen Regeln 500 bis 560 Kilo per □ Cent. betragen wird, wenn die Gurtung vollständig in Anspruch genommen ist. Diese Spannung muss durch dieselben Nieten übertragen werden, welche die vertikale Schubspannung aufzunehmen haben; die Resultante beider Kräfte ist die grösste schiefe Spannung (Pressung), welche nach Gleichung 55) berechnet wird und stets die an derselben Stelle herrschende Längenspannung überschreitet. Diese grösste schiefe Spannung kann 650—700 Kilo betragen, wenn in demselben Querschnitt das Maximum der Längenspannung und das Maximum der horizontalen Schubspannung herrscht, in diesem Falle haben an den Wandstössen die Nieten zunächst der Gurtung etwa noch einmal soviel auszuhalten, als auf die übrige Höhe, da die Nietendistanz auf eine Schubspannung des Blechs von 350 K. berechnet ist. — Hienach motivirt sich die in Fig. 102 skizzirte Anordnung,

Fig. 102.



wo die Nieten da, wo sie in die Nähe der Gurtung grössere Kräfte zu übertragen hat, zahlreicher angebracht sind; der Höhenabstand der Nieten wird hiebei nicht verringert, da hiemit eine weitere Verschwächung des Bleches verbunden wäre. — Man kann nach Umständen eine ähnliche Anordnung durch Anwendung mehrerer Stossplatten von verschiedener Breite erzielen; bei kleineren Trägern aber wird man da, wo die Gurtung die grösste Längenspannung auszuhalten hat, die Wandstösse beiderseits mit doppelten Nietreihen versehen.

104. Die Nieten, mittelst welchen die Blechwand mit der Gurtung verbunden ist, haben die daselbst herrschende Schubkraft zu übertragen; diese Schubkraft berechnet sich nach

Gleichung 45); die Anwendung dieser Gleichung ist jedoch etwas umständlich; wir haben diese Schubkraft für 2 Beispiele gerechnet (vergl. Tafel I. und VII. und N°. **27.** und **28.**) und gefunden, dass die Schubspannung zunächst der Gurtung, gegenüber der horizontalen Schubspannung $\mathfrak{S}_0$ in der neutralen Faser beträgt:

für eine Brücke von 15 M. Spannweite . . . 0,735—0,8 $\mathfrak{S}_0$
für eine Brücke von 3 Oeffnungen von 67 M. mittlerer Spannweite (Langonbrücke) . . . 0,817 $\mathfrak{S}_0$

Man wird im Allgemeinen nicht zu weit gehen, wenn man die Schubspannung zunächst der Gurtung $^4/_5$ der Schubspannung in der neutralen Faser annimmt und demgemäss für die Entfernung D, der Nieten, welche die Wand mit der Gurtung verbinden, $^5/_4$ derjenigen Entfernung annimmt, welche nach Gleichung 163) für die Nietenentfernung der übrigen Wandfläche berechnet wird, woraus folgt:

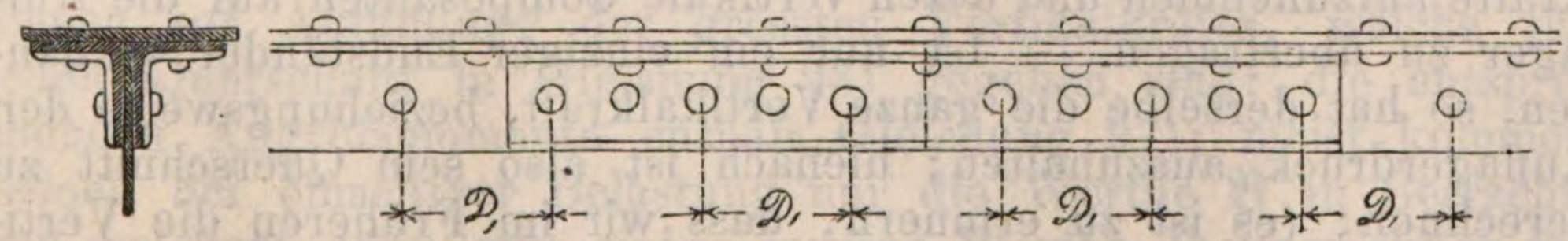
$$D_1 = 1{,}25 \cdot \mathfrak{C} \cdot \frac{2\,\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}} \cdot \frac{d^2\pi}{4} \quad . \quad . \quad . \quad 164)$$

Ist Alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt, so soll $\mathfrak{C}$ nicht grösser als 600 genommen werden.

Es ist von Werth, die Entfernung der Nieten zwischen Wand und Gurtung nicht grösser zu machen, als vorstehende Regel angibt, da die Gesammtanzahl der Gurtungsnieten hiedurch wesentlich bedingt ist, was auf die Herstellungskosten Einfluss hat.

Dieselben Nieten, welche Gurtung und Wand verbinden, werden nach Umständen zur Verbindung der Stösse einzelner Gurtungstheile, insbesondere der Winkel dienen; in diesem Falle haben diese Nieten ausser der zwischen Wand und Gurtung herrschenden Schubkraft auch noch die Längenspannung eines Theils der Gurtung aufzunehmen. — Da man mit Rücksicht auf die Verschwächung der Gurtung keine stärkeren Nieten anwenden darf, so soll man in der Nähe dieser Stösse die

Fig. 103.



Nieten einander näher setzen, als die obige Regel angibt (vergl. Fig. 103) und zwar wird man häufig je eine weitere Niete zwischen den Nieten der sonst durchlaufenden Eintheilung anbringen können, da diese Eintheilung nach vorstehender Darstellung ziemlich weit gewählt werden kann und soll.

105. Da die Blechwände einen starken Druck auszuhalten haben, so müssen sie, insofern sie gegenüber ihren Längen- und

Breitendimensionen verhältnissmässig geringe Metalldicke haben, durch besondere Absteifungen gegen Einknicken oder Ausbauchen geschützt werden. Es ist dies insbesondere dann nothwendig, wenn die Wanddicke auf das durch die Formel bestimmte Maass beschränkt ist.

In der Regel geschieht die Absteifung der Blechwände durch Vertikalstützen, welche aus Winkeln, ⊤ Eisen oder Combination verschiedener Blechsorten bestehen. — Bei der Britanniabrücke wurde die Entfernung der 20—26′ hohen ⊤ förmigen Rippen zu 2′ engl. angenommen; bei der Brücke von Langon wurde bei 5,5 M. Wandhöhe die Distanz der Vertikalrippen auf 0,86 M. bemessen; bei geringerer Trägerhöhe darf die Distanz der Vertikalrippen grösser genommen werden und wird die von Gurtungen und Rippen eingeschlossene freie Wandfläche für jede Blechdicke eine bestimmte Zahl Quadrateinheiten messen dürfen.

Bei grösseren Trägern, wo die Distanz der Vertikalrippen kleiner ist, dient es wesentlich zur Materialersparniss, wenn zwischen einzelnen stärkeren Ständern, schwächere Rippen verwendet werden; die stärkeren Ständer dienen insbesondere zur Befestigung der Querträger und werden häufig durch die Befestigung der letzteren bedingt; in der Praxis handelt es sich somit oft darum, ob zwischen den durch die Querträger bestimmten Ständern eine oder mehrere Vertikalrippen nothwendig werden.

Wenn zunächst nur die obere Gurtung eines Trägers belastet ist, so muss die Hälfte der Belastung durch die Wand auf die untere Gurtung übertragen werden, was ein weiterer Grund des Ausbauchens dünner Wände ist. — Zur Uebertragung dieser Kräfte können aber wiederum dieselben Vertikalrippen dienen oder nach Umständen hiezu besonders angeordnet werden; so z. B. bei Querträgern, welche durch die Fahrbahn in bestimmten Punkten belastet werden und dann gerade hier ihre Vertikalrippen erhalten.

106. Besondere Aufmerksamkeit erfordern die Endständer. Dieselben haben die in der Wand nach allen Richtungen thätigen Kräfte aufzunehmen und deren vertikale Composanten auf die Auflager zu übertragen. — Ist nur ein einziger Endständer vorhanden, so hat derselbe die ganze Vertikalkraft, beziehungsweise den Auflagerdruck auszuhalten; hienach ist also sein Querschnitt zu berechnen; (es ist zu erinnern, dass wir im Früheren die Vertikalkräfte stets für ein Geleise berechnet haben, so dass dieselben für die Rechnung erst auf einen Träger reducirt werden müssen).

Sind mehrere Endständer vorhanden, so muss man sich vor Allem darüber klar sein, in welcher Weise sich dieselben in die zu übertragende Kraft theilen; es kommt hiebei wesentlich die Formänderung des ganzen Trägers in Betracht und hat in Folge der Biegung der Träger zunächst ein Bestreben auf die Auflagerkante zu drücken; wir haben schon in N°. **85.** darauf aufmerksam

gemacht, dass durch passende Anordnung der Endständer der Druckmittelpunkt von der Auflagerkante abgelenkt werden könne; bei gegebener Vertheilung der Endständer handelt es sich dann darum, die Richtung der Resultante der Auflagerreaction zu bestimmen.

Die Beurtheilung der auf einen Endständer treffenden Belastung wird bei continuirlichen Trägern besonders schwierig; die Einwirkung ist hier eine gegenseitige, indem einestheils die auf jeden der Endständer treffende Kraft durch die Gestalt der elastischen Linie bestimmt ist, anderseits letztere Kurve durch die Anordnung der Endständer beeinflusst ist.

Wo die Endständer ganz fehlen, da hat die Wand auf die Auflagerbreite den ganzen Druck selbst aufzunehmen; wenn dieser Druck zudem ungleich vertheilt ist, z. B. vorzugsweise auf die Kante wirkt, wird leicht ein Ausbiegen der Wand eintreten; bei grösseren Trägern sind daher die Endständer unentbehrlich; ebenso muss eine ungenügende Stärke der Endständer als ein entschiedener Constructionsfehler bezeichnet werden.

Bei den Blechwandbrücken werden die Endständer durch aufgenietete Winkel und ⊤Eisen gebildet, wobei derjenige Theil der Mittelwand, der direkt über der Auflagerfläche sich befindet, zum Querschnitt des Endständers zu rechnen ist. — Selbstverständlich sind auch hier die nothwendigen Abzüge für die Nietlöcher zu machen.

107. Für Eisenbahnbrücken sind die zur Berechnung nothwendigen Vertikalkräfte $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ im 3. Abschnitt berechnet. — So sind insbesondere für die kleineren Spannweiten bis 7 M. die Maximalwerthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ in den Tabellen XXX. und XXXI. zusammengestellt.

Für die grösseren Spannweiten ist es von Wichtigkeit, die Werthe $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ für jeden einzelnen Querschnitt schnell auffinden zu können; es wurden desshalb die gleichförmigen Belastungen q und q' berechnet, welche als Aquivalent eines Eisenbahntrains angenommen werden dürfen; dieselben sind in Tabelle XVII. zunächst für freiaufliegende Träger zusammengestellt. Die Werthe q' sind bei einseitiger Belastung anzuwenden und dienen zur Auffindung der grössten Vertikalkräfte, welche für jeden Querschnitt in Gleichung 96) gegeben sind; die entsprechenden Angriffsmomente enthält Gleichung 97); meist kommen jedoch bei einseitiger Belastung nur die Werthe $\mathfrak{V}$ in Betracht, von welchem dann nur einige wenige Werthe (hauptsächlich für die Mitte und die Auflager) berechnet werden müssen.

Für die gleichförmig verbreitete Maximallast findet sich der Auflagerdruck, wenn man in Gleichung 91) $\lambda = 1$ setzt, und hienach berechnen sich die einzelnen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ nach Gleichung 92) und 93); der absolut grösste Werth von $\mathfrak{M}$ tritt bei der Maximallast ein und ist stets gleich $\frac{ql^2}{8}$.

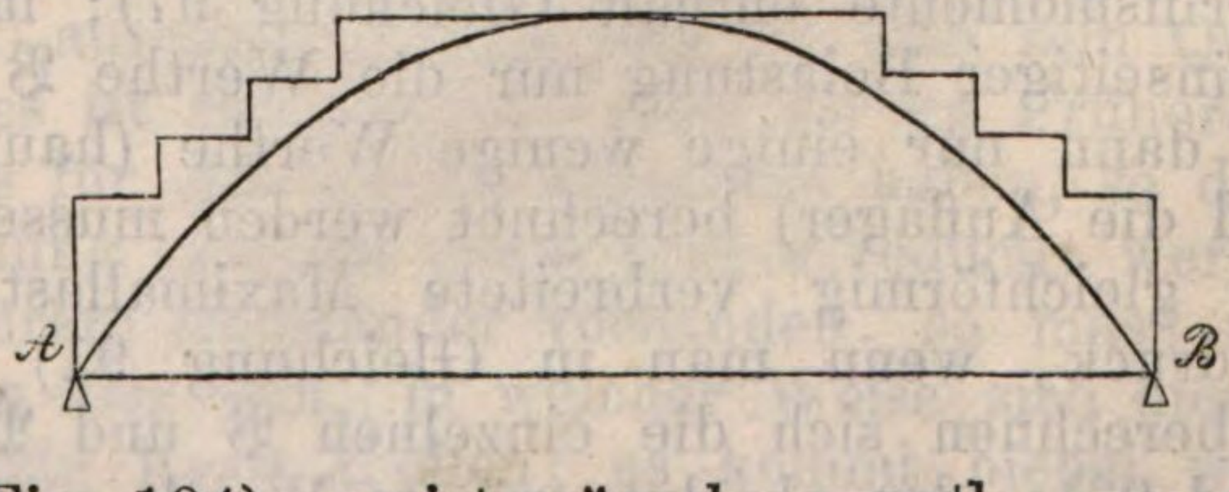
Im Uebrigen geben die graphischen Darstellungen der Tafel II. eine übersichtliche Anschauung der Aenderungen der Werthe $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$. — Für besondere Fälle dienen die Gleichungen 100) bis 102) in N°. **63.**

Bei continuirlichen Trägern ist aus Tabelle XVII. der Werth q einzusetzen, hiernach bestimmen sich die Auflagerdrücke für 2 Oeffnungen nach der Gleichung 104) beziehungsweise 105) und bei Senkung der Stützpunkte nach den Gleichungen 117) und 118); für 3 Oeffnungen nach den Gleichungen 123) und 124) und bei Senkung der Stützpunkte nach Gl. 131) und 132); $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ finden sich dann nach den Gleichungen 106)—109) und sind in N°. **73.** und **78.** Regeln zur Berechnung der hauptsächlichsten Werthe gegeben.

Continuirliche Träger sollen nur bei grösseren Spannweiten angewendet werden und ist dann je eine Oeffnung gleichförmig belastet anzunehmen; das Rechnungsverfahren bleibt für alle Fälle dasselbe, sobald die Belastung per Längeneinheit festgestellt ist.

Wenn die einzelnen Werthe $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ für sämmtliche Querschnitte bekannt sind — zu welchem Zwecke graphische Darstellungen wie in den Tafeln II.—V. hergestellt werden — so werden die Gurtungs-Querschnitte und Blechwanddicken nach den praktischen Formeln 143), 150) und 152), sowie gebogene Gurtungen nach den Formeln 159) und 161) berechnet. — Durch passende Wahl der Gurtungs-Querschnitte kann erreicht werden, dass dasselbe Maximum der Längenspannung auf die ganze Trägerlänge stattfindet; man ändert den Gurtungs-Querschnitt in der Regel dadurch, dass man mehr oder weniger Kopfbleche oder auch der Reihe nach stärkere oder schwächere Winkel oder Kopfbleche anbringt; die Aenderung des Gurtungs-Querschnitts geschieht hiebei staffelförmig, während die Angriffsmomente sich bei gleichförmiger vertheilter Ueberlast stetig ändern; eine staffelförmige Darstellung der Werthe der aufeinander folgenden Gurtungs-Querschnitte wird sich bei horizontalen geradlinigen Gurtungen der Parabel der grössten Angriffsmomente möglichst anzuschliessen haben und zwar so, dass die Längenspannung des mittelsten Querschnitts nirgends überschritten

Fig. 104.

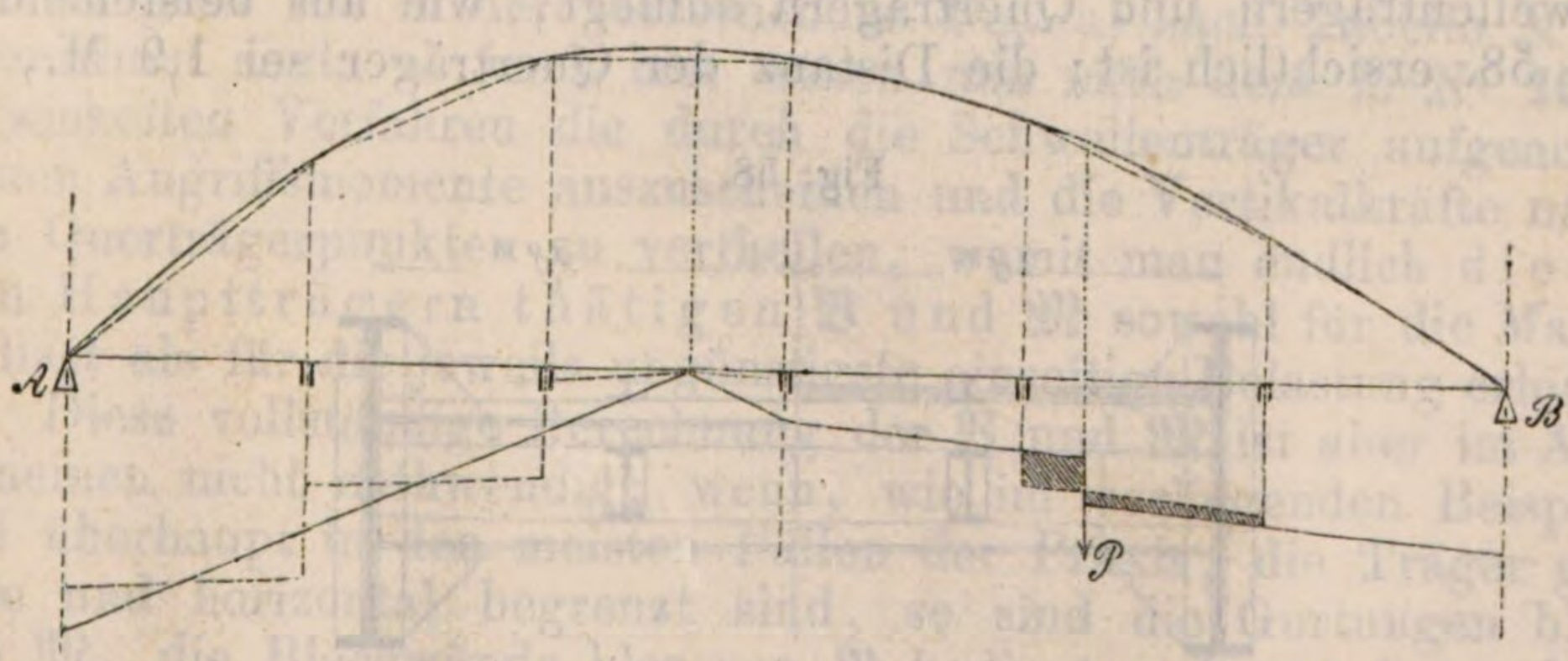


wird (vergl. Fig. 104); es ist wünschenswerth, wenn die Längenspannung in den übrigen Querschnitten, zumal gegen die Auflager hin, etwas kleiner wird, weil hier die grösste schiefe Wandspan-

nung — welche die grösste Längenspannung nicht überschreitet — durch verhältnissmässig grössere Vertikalkräfte beeinflusst ist.

108. Es ist bis jetzt angenommen, dass die einzelnen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ an den Hauptträgern thätig seien; diess ist jedoch nur dann genau, wenn die Lasten unmittelbar auf die Hauptträger aufgelegt sind; meist sind jedoch besondere Querträger zur Aufnahme der Verkehrsbelastung vorhanden, so dass die Hauptträger nur an einzelnen Punkten die zufällige Last aufnehmen; zwischen den Querträgern müssen die Lasten durch Längenträger (Schwellenträger, poutrelles) aufgenommen werden, welch letztere in Folge dessen mit einem Theil des Angriffsmoments behaftet sind; in den Hauptträgern ist dann das Moment um so viel kleiner. Sind die Längenträger frei aufliegend, so ist das in ihnen herrschende Angriffsmoment über den Querträgern gleich Null und ist somit daselbst das Angriffsmoment $\mathfrak{M}$ des Hauptträgers dasselbe, wie wenn die Last unmittelbar auf dem Hauptträger aufliegen würde; wenn man die auf den Hauptträger wirkenden Momente graphisch darstellen will, so hat man die den Querträgern entsprechenden Punkte der Kurve $\mathfrak{M}$ durch schwach gekrümmte (dem Eigengewicht entsprechende) Parabelbögen zu verbinden; die kleinen Momente $\Delta\mathfrak{M}$, welche zwischen dem so entstandenen Polygon und der Kurve $\mathfrak{M}$ sich darstellen, müssen durch das Widerstandsmoment der Längenträger (nach Umständen theilweise durch die Fahrschienen) aufgenommen werden; da die Annahme einer gleichförmigen Belastung für die Fahrbahn im Allgemeinen nicht zutrifft, so sind zwar Angriffsmomente und Vertikalkräfte für die einzelnen Theile der Fahrbahn je besonders zu berechnen; vorstehende Betrachtung behält jedoch ihre Richtigkeit, indem die Brücke im betrachteten Moment so belastet gedacht wird, wie es für die Berechnung der Hauptträger gestattet ist.

Fig. 105.



In Fig. 105. sind die Kurven $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ dargestellt für den Fall, dass die Brücke einerseits mit der Maximallast behaftet, anderseits durch ein concentrirtes Gewicht P belastet ist.

Die Kurve $\mathfrak{V}$ erhält an den den Querträgern entsprechenden Punkten staffelförmige Absätze, deren Grösse der Belastung der Querträger proportional ist; zwischen diesen Absätzen hat die Kurve $\mathfrak{V}$ die dem Eigengewicht p entsprechende Neigung (strenge genommen dürfte nur das Eigengewicht der Hauptträger gleichförmig vertheilt angenommen werden; da jedoch die Querträger meist in gleichen Abständen angebracht sind, so nehmen wir auch das Gewicht der Fahrbahn auf den Hauptträger gleichförmig vertheilt an); auf der linken Seite der Fig. 105. entspricht die an den Querträgern stattfindende Aenderung der Vertikalkraft der auf die Länge eines Brückenfelds eintretenden zufälligen Last; auf der rechten Seite bleibt die Kurve $\mathfrak{V}$ da unverändert, wo zwischen 2 Querträgern keine zufällige Last eintritt; die in dem 5. Felde wirkende concentrirte Last P vertheilt sich auf die beiderseitigen Querträger nach dem Hebelgesetz, was zur Folge hat, dass die beiden in Fig. 105. schraffirten Flächen gleich gross sein müssen.

Die hier beschriebene Modification der Kurven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ wird in der Regel nothwendig werden, da die meisten Brücken mit Querträgern versehen sind; bei grossen Spannweiten sind die Aenderungen der Kräfte und Momente verhältnissmässig geringer, indem die Fachweite gegenüber der Totallänge sehr zurücktritt.

Wenn man bei kleinen Brücken die Vertikalkräfte und Momente nach Formel 100) — 102) unmittelbar berechnet (ohne die Tabelle XVII. zu benützen), so kann man die Lasten sogleich nach dem Hebelgesetz auf die Querträger vertheilen und hienach die $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ ausrechnen; das Resultat muss selbstverständlich dasselbe bleiben.

§. 12. Beispiel einer Blechwandbrücke von 15 M. Spannweite.

109. Wir wählen eine Eisenbahnbrücke, deren Geleise auf Schwellenträgern und Querträgern aufliegt, wie aus beistehender Fig. 58. ersichtlich ist; die Distanz der Querträger sei 1,9 M., in

Fig. 58.

den Endfeldern 1,8 M., das Gewicht der Brücke wird gemäss Tabelle XVII. für die Berechnung zu 1075 Kilo per laufenden Meter angenommen und sind in Tabelle XVI. Angriffsmomente und Ver-

tikalkräfte für die Belastung der halben und ganzen Brücke berechnet; hienach sind auf Tafel III. die Kurven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ für die vorliegende Spannweite verzeichnet. Hieraus sind in der graphischen Darstellung Fig. a) der Tafel VI. mit Berücksichtigung der Querträgerdistanz von 1,9 M. die auf die Hauptträger antreffenden Kräfte und Momente abgeleitet.

Wenn aber auch die vorstehend angenommenen Belastungen ein richtiges Bild der hauptsächlichsten Anstrengungen des Trägers geben und insbesondere die grössten Angriffsmomente durch die angenommene Maximalbelastung bedingt sind, so sind anderseits die grössten Vertikalkräfte nicht inbegriffen; letztere finden vielmehr nach N°. **59.** an jedem Punkte dann Statt, wenn die zufällige Last vom entgegengesetzten Auflager bis dahin vorgerückt ist. Die grössten Werthe $\mathfrak{V}$ sind somit nach Gleichung 96) zu bestimmen, ebenso die zugehörigen Werthe $\mathfrak{M}$ nach Gleichung 97). — In der folgenden Tabelle XXXII. sind nach Gleichung 96) und 97) die Werthe $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ je für die Querträgerpunkte berechnet, indem gemäss Tabelle XVII. für die einseitige Belastung $k' = 6160$ und $q' = 7235$ Kilo per Meter angenommen wurde.

Tabelle XXXII.

Abscisse:	$\frac{1}{2} = 7{,}5$ M.	$\frac{5\,l}{8}$	$\frac{3}{4}\,l$	$\frac{7}{8}\,l$	$l = 15{,}0$ M.
Max $\mathfrak{V}$ nach Gl. 96)	11,55	20,05	30,02	41,42	54,26
Gleichzeitiges $\mathfrak{M}$ nach Gleichung 97)	115,45	12,98	12,01	7,86	0

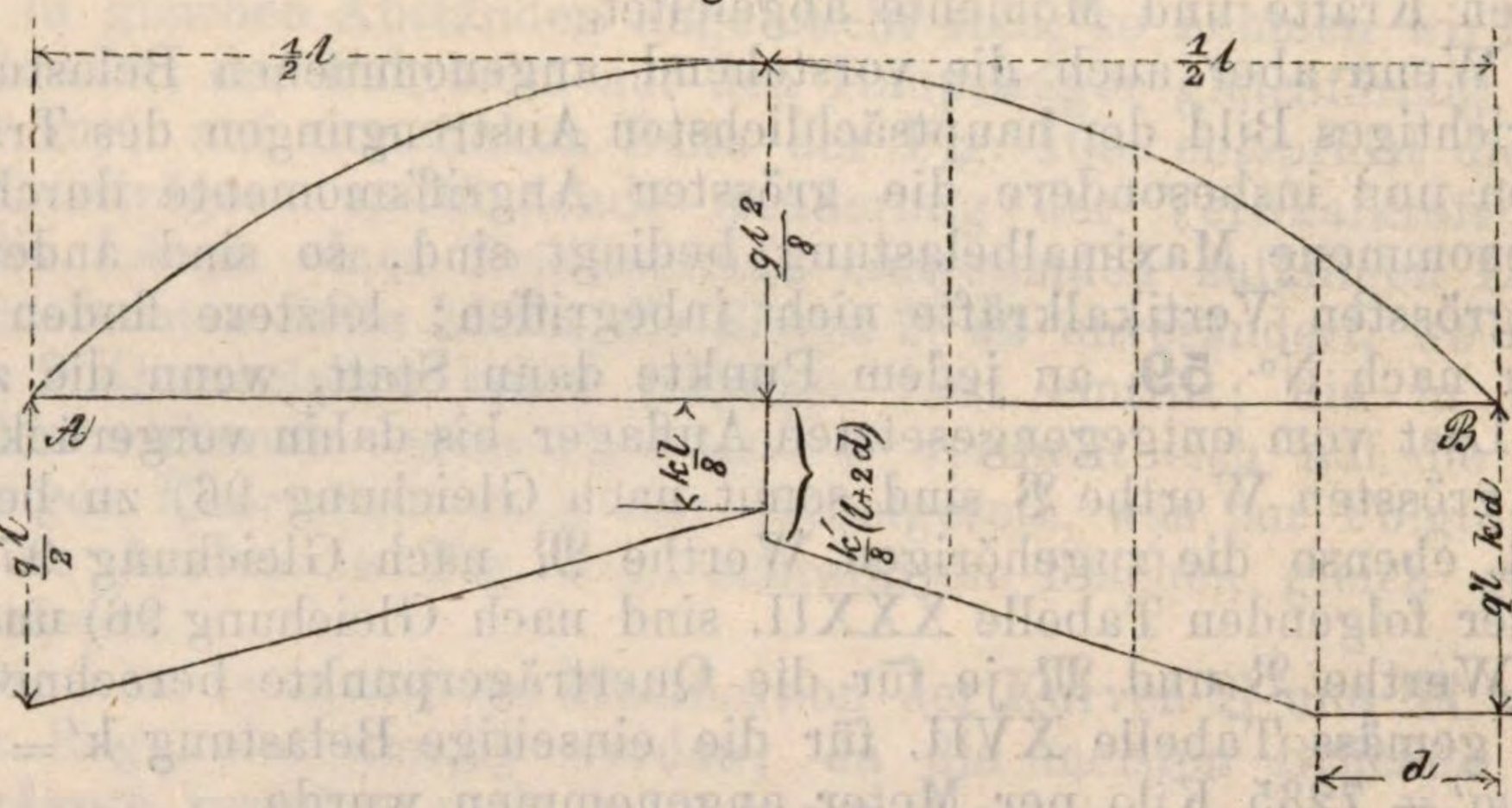
Diese Werthe sind nun in Fig. b) der Tafel VI. rechts eingetragen, während links die der Maximallast entsprechenden $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ ganz wie in der vorstehenden Fig. a) nach Tabelle XVI. verzeichnet sind. — Auch hier waren nun nach dem in N°. **108.** entwickelten Verfahren die durch die Schwellenträger aufgenommenen Angriffsmomente auszuscheiden und die Vertikalkräfte nach den Querträgerpunkten zu vertheilen, womit man endlich die in den Hauptträgern thätigen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ sowohl für die Maximallast als für die jeweils ungünstigste einseitige Belastung erhielt.

Diese vollständige Berechnung der $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ ist aber im Allgemeinen nicht nothwendig; wenn, wie im vorliegenden Beispiel und überhaupt in den meisten Fällen der Praxis, die Träger gerade und horizontal begrenzt sind, so sind die Gurtungen blos von $\mathfrak{M}$, die Blechwände blos von $\mathfrak{V}$ bedingt und man hat neben der Parabel der grössten Maximallast nur einige der hauptsächlichsten Werthe von Max $\mathfrak{V}$ zu bestimmen.

In beistehender Fig. 106. sind diejenigen Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ verzeichnet, welche für horizontal begrenzte Blechwandträger zur

Bestimmung der Wanddicke vollständig genügend sind, und zwar rechts mit, links ohne Berücksichtigung der Querträgereintheilung. Die in dieser Figur verzeichneten Werthe q, q' und k' sind aus Tabelle XVII. zu entnehmen.

Fig. 106.



In der graphischen Darstellung Fig. c) der Tafel VI. ist diese Annäherung gleichfalls eingetragen. — In derselben Figur ist aber auch eine möglichst ungünstige Stellung zweier Locomotiven in Rücksicht genommen, und ersichtlich, dass durch unser Verfahren diesem Falle genügend Rechnung getragen worden ist.

Die Werthe k' und q', welche zunächst nur den Angriffsmomenten bei einseitiger Belastung angepasst sind, geben zugleich richtige Werthe für die grössten Vertikalkräfte, welche durch aufeinander folgende Locomotivaxen zunächst den Auflagern entstehen.

110. Wir berechnen nun die einzelnen Abmessungen der Hauptträger, nachdem für dieselben die Werthe $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ genugsam bekannt sind, und zwar sind im vorliegenden Falle die in Fig. 106. verzeichneten Angaben vollständig ausreichend; wir bilden hienach die Tabelle XXXIII., indem die in Fig. 106. nicht speziell bezeichneten Werthe nach den bekannten Eigenschaften der Parabel und der geraden Linie bestimmt wurden.

Tabelle XXXIII.

Abscissen:	0	1,8 m.	3,7	5,6	7,5	9,4	11,3	13,2	15,0
Max $\mathfrak{M}$ bei Maximalbelastung.	0	68,0 t. m.	120,5	151,5	161,0	151,5	120,5	68,0	0
Max $\mathfrak{V}$ bei einseitiger Belastung.	48,7 t.	48,7	37,3	25,9	14,5	25,9	37,3	48,7	48,7

max $\mathfrak{M}$ ist in Tonnen und Metern, max $\mathfrak{B}$ in Tonnen ausgedrückt; beide Werthe sind je für beide Hauptträger zusammen gültig, somit ist für jeden derselben nur die Hälfte zu nehmen.

Die Wandbleche haben je die doppelte Querträgerdistanz zur Länge und sind am 3., 5. und 7. Querträger gestossen, für die Endbleche ist daher $\mathfrak{B} = \frac{48,7}{2}$ tons, für die mittlern Bleche ist $\mathfrak{B} = \frac{37,3}{2}$ tons. Die Entfernung $\mathfrak{H}_0$ der Gurtungsschwerpunkte ist = 144 C. anzunehmen; hienach berechnet sich nach Gleichung 148) die Distanz $\mathfrak{H}$ der Mittelpunkte von Druck und Zug für die Endfelder auf 127 Cent., für die mittlern Felder auf 135—138 Cent.; es folgt somit nach Gleichung 145) für die Wanddicke δ:

für die Endbleche

$$\delta_{,} \geqq \frac{24350}{127 \,.\, 350} \geqq 0,55 \text{ Cent.} \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

für die mittlern Bleche

$$\delta_{,,} \geqq \frac{18650}{135 \,.\, 350} \geqq 0,40 \text{ Cent.} \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Mit Rücksicht auf die Verschwächung durch die Nieten und um überhaupt keine zu geringe Dicke zu erhalten, wird die Metallstärke grösser genommen und zwar:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{,} &= 0,7 \text{ C.} \\ \delta_{,,} &= 0,6 \text{ C.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

Der Gurtungs-Querschnitt Ω bestimmt sich durch die in Tabelle XXXIII. gegebenen grössten Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ nach Gleichung 158), indem wir die obere und untere Gurtung gleich stark annehmen.

Die Distanz $\mathfrak{H}_0$ der Schwerpunkte beider Gurtungen ist 144 C., während die ganze Trägerhöhe H in der Mitte 150 C. beträgt. — Die grösste Längenspannung in der Gurtung soll 600 Kilo pro □ Cent. betragen. — Es ist nach Gleichung 158), wenn Alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt wird, für den Gurtungs-Querschnitt in der Brückenmitte:

$$\frac{16100000}{2} = \frac{600}{75} \cdot \frac{144^2}{2} \,.\, (\Omega + {}^1/_6\ \delta \,.\, 144)$$

woraus

$$\Omega + {}^1/_6\ \delta \,.\, 144 = 97,05 \text{ □Cent.} \quad . \quad . \quad \text{IV.}$$

Wir nehmen den Gurtungs-Querschnitt wie folgt:

3 Kopfbleche je 23,5 C. Breite, 0,9 C. Dicke	= 21,15 □C., zus.	63,45 □C.
2 Winkel je 20,0, zus.		40,0 „
Hiezu $^1/_6$ des Wand-Querschnitts mit $^1/_7$ Abzug für die Nieten, bei 0,6 C. Blechdicke, $^1/_6 \,.\, {}^6/_7 \,.\, 0,6 \,.\, 144 =$		12,3 „
	zus.	115,75 □C.

Uebertrag	115,75 □C.
hievon gehen ab 2 Kopfblechnieten à 1,8 . 3,7 C. = ...	13,32 □C.
1 Niete durch Winkel und Wandblech 1,8 . 2,6	4,68 „
zus.	18,0 C.

bleibt als wirksamer Querschnitt $\Omega + \frac{1}{6}\,\delta \,.\, 144 =$ 97,75□C., wie obige Gleichung IV. verlangt. Dieser Querschnitt wird gegen die Enden durch Weglassung eines, beziehungsweise zweier Kopfbleche vermindert; für jedes Kopfblech gehen von diesem Querschnitt unter Abzug der Nietlöcher 17,55 □Cent. ab, durch die stärkern Endbleche der Wand kommen wieder 2,1 □Cent. hinzu, so dass der wirksame Gurtungs-Querschnitt an den Enden 64,75 □Cent., der nächstfolgende Querschnitt 80,2 □Cent. beträgt. — Die Länge der beiden obern Kopfbleche ist in Fig. c. der Tafel VI. auf graphischem Wege bestimmt.

Zur Bestimmung der Nietendistanz dienen die Formeln 162) und 164); es muss derjenige Träger-Querschnitt betrachtet werden, für welchen $\mathfrak{V}$ am grössten ist; für diesen Querschnitt haben wir oben $\mathfrak{H} = 127$ C. gefunden. Es wurde nun für die Nieten der Mittelwand und der Gurtung ein Durchmesser von 1,8 Cent. angenommen; hienach berechnet sich die Vertikaldistanz D der Wandstossnieten nach Gleichung 162) zu 15,9 Cent., die Horizontaldistanz D, der Gurtungsnieten nach Formel 164) zu 19,9 Cent.; nach Tabelle XXII. ist nämlich $\mathfrak{V} = 24350$ K., da an den Enden 2 $\mathfrak{V}$ = 48,7 tons angegeben ist.

An den Stössen der Gurtungen sind beiderseits Stossplatten angenommen, so dass eine Niete von 1,8 Cent. Durchmesser bei 600 Kilo Schubspannung 3060 Kilo Zug und Druck zu übertragen vermag; die Kopfbleche haben bei 600 Kilo Längenspannung 10800 Kilo auszuhalten; diese Kraft kann somit von 4 Nieten übertragen werden, welche je mit 2700 Kilo und per □Cent. mit 530 Kilo in Anspruch genommen sind. — Es ergibt sich hienach die Stossplattenlänge eines einfachen Stosses = 4 D, = 80 C. und für die angewendeten Doppelstösse (vergl. Fig. 43.) = 6 D, = 120 Cent.

Die einzelnen Stösse der Kopfbleche, Winkel und Wandbleche sind in Fig. c) der Tafel VI. gleichfalls eingetragen. — Wie dort ersichtlich, so ist das oberste Kopfblech so viel verlängert, dass es als Stossplatte für die äussersten Winkelstösse dienen kann. — Die Wandstösse sind gemäss N°. **103.** mit doppelten Nietreihen versehen. — Besondere Vertikalstützen sind nicht nothwendig, da die zur Befestigung der Querträger dienenden Vertikalrippen auch für die Absteifung der Hauptträgerwand genügend sind. — Die Winkel der Vertikalrippen erhalten nahezu dieselbe Schenkelbreite wie die Gurtungswinkel, die Metalldicke wird aber entsprechend der Mittelwand 0,7 Cent. stark genommen.

111. Wir haben nun noch die einzelnen Theile der Fahrbahn zu berechnen. — Bei den Schwellenträgern darf das Eigengewicht der Fahrbahn um so mehr vernachlässigt werden, als auch die Tragkraft der Fahrschienen ausser Betracht gelassen wird. Wir finden für 1,9 M. Querträgerdistanz (Schwellenträgerlänge) nach Tabelle XXX. durch Interpolation für jeden der beiden Schwellenträger

$$\text{Max } \mathfrak{M} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4050 + 4750}{2} = 2200 \text{ Kilo} \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

wornach wir aus Tabelle XXIX. einen Querschnitt wählen, der 28,0 Cent. hoch ist und per laufenden Meter 49 Kilo wiegt.

Für die Berechnung der Querträger ist als Last zu rechnen:

1 Locomotiv-Axe	12000 Kilo
1,9 M. Fahrbahn à 600 Kilo	1140 „
zus.	13140 Kilo,

wovon die Hälfte mit je 6570 Kilo in jedem der beiden Lastpunkte thätig ist.

Nach Tabelle XXVIII. ist für diesen Fall und mit Einsetzung der aus Fig. 58. ersichtlichen Trägerdistanz von 3,6 M.

$$\text{Max } \mathfrak{M} = \frac{2{,}1 \,.\, 6570 \text{ Km.}}{2} = 6898{,}5 \text{ Km.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Wir nehmen eine Mittelwand von 50 Cent. Höhe und 0,8 Cent. Dicke an, als Gurtung genügen 2 Winkel ohne Kopfblech, die Distanz $\mathfrak{H}_0$ der Gurtungs-Schwerpunkte darf vorläufig zu 44 C. angenommen werden, so ist nach der Nährungsformel Gl. 158)

$$\text{Max } \mathfrak{M} = \mathfrak{A} \,.\, \frac{\mathfrak{H}_0^{\,2}}{H} \,.\, (\Omega + {}^1/_6 \,\delta\, \mathfrak{H}_0)$$

und indem man wie bei allen Theilen der Fahrbahn eine grösste Längenspannung $\mathfrak{A} = 500$ Kilo per □Cet. annimmt und Alles in Centimetern und Kilogrammen ausdrückt,

$$\Omega + {}^1/_6 \; 0{,}8 \,.\, 44 = \frac{689850 \,.\, 50}{500 \,.\, 44^2}$$

woraus für den Gurtungs-Querschnitt Ω folgt:

$$\Omega = 35{,}5 \text{ □Cent.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

Da für eine Niete ein Abzug von circa 5 □Cent. zu machen ist, so werden beide Winkel zusammen 40 □Cent. messen müssen; es können also dieselben Winkel angewendet werden, wie bei den Gurtungen der Hauptträger.

112. Nachdem im Vorstehenden die einzelnen Dimensionen der Träger berechnet sind, sollen die Gewichte der einzelnen Brückentheile bestimmt und übersichtlich zusammengestellt werden.

Tabelle XXXIV.

Nro.	Bezeichnung der Brückentheile.	Im Einzelnen: Cubik-Decim.	Im Einzelnen: Gewicht in K.	Gewicht: per l. M. der Brücke.
1	**Gurtungen.**			
	4 Kopfbleche je 15,4 M. lang, 23,5 C. breit, 0,9 C. dick	130,28	1016	
	4 dto. je 6,8 M. lang, 23,5 C. breit, 0,9 C. dick	57,52	449	265,4
	4 dto. je 10,6 M. lang, 23,5 C. breit, 0,9 C. dick	89,7	700	
	8 Winkel je 15,4 lang mit je 20 □Cent. Querschnitt	246,4	1922	
	16 Winkel-Deckplatten je 125 C. lang mit 20 □C. Querschnitt	40,0	312	
	8 Stossplatten je 150 C. lang mit 12 □C. Querschnitt	14,4	112	31,8
	Nietköpfe (ohne die Nieten zwischen Wand und Gurtung) 1400 Stück à 6,0 Cubik-C.	8,4	66	
	zus.	. .	4577	297,2
2	**Mittelwand.**			
	4 Wandbleche je 3,9 M. lang, 145 C. hoch, 0,7 C. dick	158,3	1235	
	4 dto. je 3,8 M. lang, 145 C. hoch, 0,6 C. dick	132,2	1031	147,2
	12 Deckplatten je 125 C. lang, 40 C. breit, 0,7 C. dick	42,0	328	
	8 Futterbleche je 125 C. lang, 20 C. breit, 0,7 C. dick	14,0	110	
	28 Winkel der Vertikalrippen je 143 C. lang, mit 14 □C. Querschnitt	56,0	437	75,8
	4 Eckständer je 143 C. lang mit 50 □C. Querschnitt	28,0	218	
	1600 Nietköpfe à 6 Cubik-C.	9,6	75	
	zus.	. .	3434	223,0
3	**Diagonalverbindungen.**			
	8 Stück je 5,2 M. lang, 10 C. breit, 0,7 C. dick	29,1	229	15,3
	110 Nietköpfe à 8 Cubik-C.	0,88	7	
	zus.	. .	236	15,3

Tabelle XXXIV. (Fortsetzung.)

Nro.	Bezeichnung der Brückentheile.	Im Einzelnen		Gewicht
		Cubik-Decim.	Gewicht in K.	per l. M. der Brücke.
4	**Querträger.**			
	9 Wandbleche je 2,9 M. lang, 50 C. hoch, 0,8 C. dick	104,4	814,0	
	18 Eckbleche je 143 C. hoch, vergl. 23 C. breit, 0,8 C. dick	47,4	366,0	
	36 Winkel je vergl. 3,5 M. lang mit je 20 □C. Querschnitt	252,0	1966,0	
	36 Deckplatten je 42 C. lang, 30 C. hoch, 0,6 C. dick	27,2	212,0	
	1400 Nietköpfe à 6 Cubik-C.	8,4	66,0	
	zus.	. .	3424,0	222,3
5	**Schwellenträger.**			
	16 Stück Doppel-T-Eisen je 1,9 M. lang, per laufenden Meter je 49 Kilo wiegend .	. .	1489,6	
	64 Stück Eckwinkel je 38 C. hoch mit 25 □C. Querschnitt	44,8	349,4	
	260 Nietköpfe à 10 Cubik-C.	2,6	20,3	
	zus.	. .	1859,3	120,8
6	**Fahrschienen.**			
	15,4 laufenden Meter à 80 Kilo	. .	1232,0	80,0
7	**Querschwellen.**			
	16 Stück je 2,5 M. lang, $^{24}/_{16}$ Cent. stark, je 67 K. wiegend	. .	1072	70,0
8	**Eichene Bedielung.**			
	2,2 M. breit, 5 C. dick, wiegt per laufenden Meter 83 K., somit für 15,4 M. Länge .	. .	1293,2	83

Zu Nro. 1. Das Gesammtgewicht der Gurtung beträgt 135 % von dem Gewicht, welches die theoretische mittlere Gurtung verlangen würde.

Zu Nro. 2. Das Gesammtgewicht der Mittelwand beträgt 151 % von dem Gewichte der Wandbleche allein.

Die sub 1—8. aufgeführten Gewichte sind nun gemäss N°. **66.** auf Hauptträger und Fahrbahn zu vertheilen, wonach sich folgende Zusammenstellung ergibt:

Tabelle XXXV.

Nro.	Bezeichnung der Brückentheile.	Gewicht		Summe	
		in Kilo.	per lauf. Meter.	total.	per lauf Meter.
	Hauptträger.				
1	Gurtungen	4577	297,2		
2	Mittelwand	3434	223,0		
3	Diagonalen	236	15,3		
				8247,0	535,5
	Fahrbahn.				
4	Querträger	3424,0	222,3		
5	Schwellenträger	1859,3	120,8		
6	Fahrschienen	1232,0	80,0		
7	Querschwellen	1072,0	69,5		
8	Bedielung	1293,2	84,0		
				8880,5	576,6
	Gesammtgewicht.			17127,5	1112,1
	Hievon beträgt:				
6—8	der Oberbau	. .	. .	3597,0	233,0
1—5	die Schmiedeisenconstruction	. .	. .	13530,5	879,1
	Summe wie oben	. .	. .	17127,5	1121,1

Nach Gleichung 103) hatten wir das Eigengewicht in der Rechnung anstatt 1121,1 zu 1075 angenommen; für die grösste Längenspannung entsteht dadurch nur eine sehr geringe Differenz, indem solche durch Einsetzen des wirklichen Gewichts von 1121,1 Kilo auf $\frac{4655 + 1121,1}{4655 + 1075} \cdot 600$ oder 606,6 Kilo erhöht wird. — In Gleichung 103[a]) wäre für das vorliegende Beispiel zur Gewichtsberechnung zu setzen:

$$C = 576,6$$

$$F = \frac{535,5}{15} = 35,7.$$

Es soll noch bemerkt werden, dass die graphischen Darstellungen der Tafel I. für das vorliegende Beispiel nicht genau zutreffen, indem die Schubkraft in der neutralen Faser geringere Werthe hat; an denjenigen Punkten, wo die Längenspannung in der äussersten Faser für die 3 verschiedenen Querschnitte je 600 Kilo beträgt, ist die Schubspannung in der neutralen Faser nur 280, 210 und 90 Kilo, wonach die grösste schräge Wandspannung 590, 560 und 514 Kilo beträgt, somit unter dem Werthe der Längenspannung der äussersten Fasern bleibt. — Die in Tafel I. angenommenen Schubspannungen treffen für continuirliche Träger

zu, für welche zunächst den Zwischenpfeilern $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ gleichzeitig die grössten Werthe haben.

§. 13. Die Eisenbahnbrücke bei Langon.

113. Die Brücke von Langon ist zwar keines der neuesten Bauwesen, allein als Blechwandbrücke unübertroffen in Bezug auf günstige Materialvertheilung; hier wurden zuerst in grossem Maassstabe die bei der Britanniabrücke gemachten Erfahrungen von sachkundigen französischen Ingenieuren angewendet, und wenn auch der Einfluss der englischen Röhrenbrücken sich nicht verläugnet, so ist doch ein Fortschritt und eine selbstständige Beurtheilung deutlich zu erkennen.

Wir haben früher Notizen benützt, welche wir noch während des Baues der Brücke erhielten, seitdem ist in dem Werke „*Construction des ponts metalliques par MM. L. Molinos et C. Pronnier, Paris, 1857*“ eine eingehende Beschreibung des ganzen Baues veröffentlicht worden, und legen wir dieselbe der folgenden Darstellung zu Grunde; hienach sind auch auf Tafel VII. am Schlusse des Buches die wichtigeren Haupt-Abmessungen und Detail-Maasse verzeichnet.

Bei der Berechnung der Brücke wurde die Spannweite für die Mittelöffnung zu 74,4 M., für die Seitenöffnungen zu 64,08 M. angenommen, so dass die Auflagerbreite für die Zwischenpfeiler 3 M. (entsprechend der wirklichen Berührungsfläche) und für die Endpfeiler 1,57 M. betrug; die ganze Länge der Hauptträger ist 211,7 Meter.

Als Eigengewicht wurde für den laufenden Meter eines Geleises 1900 K. gerechnet; als zufällige Last ebenso 4000 K.; da die Brücke für 2 Geleise blos 2 Hauptträger erhalten hat, so hat jeder Träger die auf 1 Geleise antreffende Last auszuhalten.

Die Hauptträger sind über sämmtliche 3 Oeffnungen continuirlich hergestellt; zur Bestimmung der elastischen Linie, der Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ und der Auflagerdrücke wurde das Verfahren von Clapeyron angewendet, welches in N°. **21.** und **22.** entwickelt ist.

Es wurden hiebei der Reihe nach eine oder mehrere Oeffnungen mit der zufälligen Last je auf ihre ganze Länge behaftet gedacht; die hauptsächlichsten Resultate sind in der umstehenden Tabelle XXXVI. enthalten.

114. Mittelst der Tabelle XXXVI. lassen sich sämmtliche $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ nach dem Hebelgesetz bestimmen, wie diess auch in N°. **78.** entwickelt ist. — Auf Grund dieser Rechnungen wurde eine graphische Darstellung der $\mathfrak{M}$ (moments de rupture) und $\mathfrak{V}$ (efforts tranchants) für sämmtliche 4 Belastungsarten hergestellt.

Durch gleichzeitiges Auftragen der einzelnen Kurven bildet sich für die Werthe $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ je eine Umhüllungslinie, welche die absolut grössten Werthe der Vertikalkräfte und Angriffsmomente

Tabelle XXXVI.

p = 1900 K.
k = 4000 K.

a = 64,08 M.
b = 74,4 M.

Art der Belastung.		1. Auflager A.	1. Oeffnung.	2. Auflager B.	2. Oeffnung.	3. Auflager C.	3. Oeffnung.	4. Auflager D.
Belastung der Oeffnung AB	Grösstes Angriffsmoment $\mathfrak{M}$	0	2137,5 tm	1936,5 tm	1079,8 tm	637,3 tm	682,6 tm	0
	Auflagerdruck	158,8 t	—	307,4 t	—	124,0 t	—	—
Belastung der Oeffnung BC	Grösstes Angriffsmoment $\mathfrak{M}$	0	211,4	2084,6	1997,7	2084,6	211,4	—
	Auflagerdruck	28,3	—	312,9	—	312,9	—	28,3
Belastung der Oeffnungen AB und BC	Grösstes Angriffsmoment $\mathfrak{M}$	0	1673,5	3108,6	1649,2	1809,5	280,3	—
	Auflagerdruck	140,5	—	474,5	—	291,1	—	—
Belastung sämmtlicher 3 Oeffnungen	Grösstes Angriffsmoment $\mathfrak{M}$	—	1777,3	2833,5	1248,9	2833,5	1777,3	—
	Auflagerdruck	144,8	—	452,7	—	452,7	—	144,8

enthält. — Für jeden Querschnitt wurde die Wandstärke und der Gurtungs-Querschnitt nach den beschriebenen Maximalwerthen von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ bestimmt.

Wir bezeichnen mit:

H die ganze Höhe der Construction,
$\mathfrak{H}_0$ die Distanz der Gurtungs-Schwerpunkte (zugleich Höhe der Blechwand = 550 C.),
δ die Blechwanddicke,
Ω die Gurtungs-Querschnitte,
$\mathfrak{A}$ die Spannung in den äussersten Fasern,
Θ das Trägheitsmoment des Querschnitts,
$\mathfrak{C}$ die Schubspannung gegen Abscheeren.

Für die Berechnung der Wandstärke nahm man an, dass ein Verticalschnitt $\delta\mathfrak{H}_0$ die Kraft $\mathfrak{V}$ aufzunehmen habe, wodurch man als vertikale Wandspannung $\mathfrak{C}$ erhielt.

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{V}}{\delta\mathfrak{H}_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{I.}$$

Wir wissen aber aus N°. **24—28.**, dass die vertikale Schubspannung sich nicht gleichförmig auf den Querschnitt vertheilt; es ist vielmehr aus Tafel I. oder speciell aus Tafel VII. ersichtlich, dass die verticale Schubspannung gegen die Gurtungen hin abnimmt; — es ist nach Gleichung 144) die Schubspannung in der neutralen Faser

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\mathfrak{V}}{\delta \mathfrak{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Die vorstehenden Gleichungen I. und II. unterscheiden sich nur durch den Werth der Grössen $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}$; letztere Grösse finden wir nach Gleichung 148) über den Zwischenpfeilern $= 0{,}93\ \mathfrak{H}_0$. — Es wurde bei Feststellung des Projects unter Vernachlässigung der Nietlöcher eine grösste Schubspannung von 360 Kilo per □C. angenommen und die Blechdicke nach obiger Gleichung I. für jede Abscisse berechnet. Zunächst den Mittelpfeilern wurde die Blechdicke auf 12 Mm. festgesetzt; als geringste Dicke nahm man etwa auf die Hälfte der Länge 7 Mm. an, da diese Stärke mit Rücksicht auf Ausbauchungen und auf Witterungsverhältnisse nicht vermindert werden wollte. — Wir haben in Tafel VII. auf Grund der in N°. **28.** früher gegebenen Berechnung eine graphische Darstellung der Schubspannung und der grössten schiefen Spannung (oder Pressung) gegeben.

Zur Bestimmung des Gurtungs-Querschnitts wurde eine Näherungsformel angewendet:

$$\mathfrak{A} \cdot \left\{ \mathfrak{H}_0\ \Omega + \frac{1}{6}\ \delta \mathfrak{H}_0{}^2 \right\} = \mathfrak{M} \quad . \quad . \quad 165)$$

Es war beabsichtigt, dass $\mathfrak{A}$ nicht grösser als 600 Kilo pro □ Cent. sein solle und ist auch diese Spannung auf den weitaus grösseren Theil der Länge nicht überschritten; über den Pfeilern ist jedoch — wie auch die graphische Darstellung von Molinos und Pronnier zeigt — die Spannung im Verhältniss von circa $^6/_5$ grösser.

Wenn man aus Tabelle XXXVI. den Maximalwerth von $\mathfrak{M}$ sowie die einzelnen Dimensionen des Trägers in Gleichung 165) einsetzt, so erhält man ohne Nietenabzug

$$\mathfrak{A} = \frac{3108600}{5{,}5 \cdot 654{,}4 + \frac{1}{6}\, 1{,}2 \cdot 5{,}5^2 \cdot 100} = 739\ \text{K.}$$

Nach unserer Näherungsformel 158) (die für symmetrische Querschnitte mathematisch genau ist) haben wir, gleichfalls unter Vernachlässigung der Nietlöcher, eine Spannung von 752,8 Kilo erhalten, wonach also im vorliegenden Fall die Formel 165) einen Fehler von etwa $1\,^1/_2\,^0/_0$ gibt.

Der Gurtungs-Querschnitt wurde für die einzelnen Abszissen dadurch geändert, dass man ausser den durchlaufenden Winkeln und Bändern je nach der Grösse des Angriffsmoments 1 bis 4 Hauptkopfblechlagen anbrachte, in Folge dessen der Gurtungs-Querschnitt zwischen 312,4 und 654,4 □ Cent. variirte.

115. Die Angabe, dass die grösste Längenspannung auf 600 Kilo bestimmt sei, bedarf noch mehrfacher Berichtigungen.

Als Eigengewicht ist in der Berechnung 1900 Kilo angenommen; nach annähernd übereinstimmenden Angaben von Molinos und Pronnier beträgt aber das Eigengewicht:

Hauptträger	721	tons
Querträger, Schwellenträger, Andreaskreuze . .	188	„
Windkreuze und Verschiedenes	49	„
zus.	958	tons

somit per laufenden Meter eines Geleises 2264 Kilo; die grösste Spannung wäre also im Verhältniss von $\frac{6264}{5900}$ oder ca. 6% höher zu rechnen.

Ferner ist in der Berechnung des Gurtungs-Querschnitts kein Abzug für die Nietlöcher gemacht worden; dieselben betragen ca. 10% der ganzen Querschnittfläche und entsprechend ist die Spannung wiederum höher.

Ferner ist die Spannweite nach N°. **85.** zu gering gewählt; denn 74,4 M. ist ziemlich genau die lichte Entfernung der Auflagerpunkte für die Mittelöffnung, während der Auflagerdruck auf die ganze Auflagerbreite gleichförmig vertheilt angenommen ist.

Durch diese Correctionen vermehrt sich die oben berechnete grösste Spannung in der Gurtung über den Mittelpfeilern auf etwa 900 Kilo; — die grösste schiefe Wandspannung wäre somit ebendaselbst (indem nach der Berechnung in N°. **28.** 14% zur grössten Längenspannung zu addiren sind) etwa 1025 Kilo per □ Centim.

116. Wenn auch bei der Wahl des Spannungscoeffizienten von 600 K. per □ Cent. auf eine Vernachlässigung der Nietenlöcher bereits Rücksicht genommen ist, so ist doch die vorstehend berechnete grösste Spannung nicht beabsichtigt und wären die Gurtungen über den Zwischenpfeilern entsprechend zu verstärken. Auf das Gesammtgewicht hat aber diese Verstärkung weniger Einfluss, indem der weitaus grössere Theil der Brücke eine keineswegs zu hohe Spannung erleidet. — Das in der vorhergehenden Nummer berechnete Gewicht von 2264 K. per l. Meter entspricht der Formel

$$p = 560 + 25{,}4\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

während das in §. 12 entwickelte Beispiel von 15 M. die Relation zeigt

$$p = 576{,}6 + 35{,}7\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

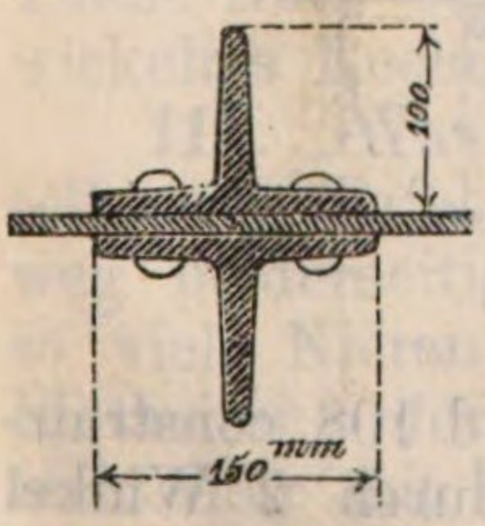
d. h. der Coeffizient C der Formel 113 a) ist bei der Langonbrücke um circa 40% niedriger als bei dem Beispiel von 15 M., obgleich in letzterem Falle die Gesammtlast q kleiner ist; (Gurtungs-Querschnitt und Wanddurchschnitt sind unter sonst gleichen Umständen der Grösse ql proportional). Wenn wir uns auch die Langonbrücke mit Rücksicht auf die wünschenswerthe theilweise Verminderung der Spannung verstärkt denken, so bleibt immer noch eine Material-Ersparniss, welche für die Träger allein über 30%, für die ganze Brücke gegen 25% betragen mag. — Dieses Mindergewicht ist nun in der Continuität der Hauptträger, in der Anordnung der Fahrbahn, wie insbesondere darin begründet, dass für 2 Geleise nur 2 Hauptträger angeordnet sind, während in unserem Beispiel von 15 M. Spannweite für ein einziges Geleise dieselbe Trägeranzahl angenommen ist.

Durch die Continuität werden am Gewicht der Gurtungen etwa 20% erspart; aber mehr noch wird für die Blechwände durch die angeführte Beschränkung der Trägeranzahl gewonnen; denn da die Blechdicke bei vermehrter Trägeranzahl auf den grössern Theil der Länge wenig oder gar nicht vermindert werden dürfte, da ferner die Absteifungen, wenn auch etwas schwächer, doch in ganz ähnlicher Weise für jeden Träger angebracht werden müssten, so würden 4 Träger wenigstens um die Hälfte schwerer als die 2 Hauptträger der Langonbrücke, und ist somit an den Seitenwänden ein Mindergewicht von 30—40% erzielt.

Die Materialersparniss, welche sich hienach für die Hauptträger hinreichend nachweisen lässt, könnte bei der grossen Distanz der Hauptträger durch das grössere Gewicht der Querträger einigermaassen neutralisirt werden, wie wir auch in N°. **66** für die Anordnung 5) für gewöhnliche Fälle ein grösseres Gewicht der Fahrbahn angenommen haben. Im vorliegenden Beispiel hat aber die aus Tafel VII. ersichtliche Querträger-Construction, welcher man eine Höhe von 3 M. gab, wesentlich günstig gewirkt, so dass die Fahrbahn per l. Meter nicht schwerer geworden ist, als bei Brücken mit kaum halb so grosser Querträgerspannweite.

Nach diesen Erläuterungen stimmt das Gewicht der Langonbrücke mit dem vorhergehenden Beispiel und sonstigen Gewichtsberechnungen recht gut überein, und haben wir ein ganz entsprechendes Beispiel einer Brücke mit continuirlichen Trägern grösserer Spannweite vor uns.

Fig. 107.



117. Die Blechwände der Hauptträger bestehen aus 86 C. breiten Blechtafeln von 5,5 M. Höhe, welche durch ⊤förmige Deckplatten an ihren vertikalen Stössen verbunden sind, wie in Fig. 107. skizzirt ist. Die Vertikaldistanz der 18 Mm. starken Nieten beträgt 10 C., die Schubspannung $\mathfrak{S}_0$ in der neutralen Faser, welche

oben auf 360 K. mit Vernachlässigung der Nieten berechnet ist, beträgt somit nach Abzug der Nietlöcher:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{100}{82} \cdot 360 = 439 \text{ Kilo} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Die Schubspannung $\mathfrak{C}$ der Nieten findet sich nach Gleichung 162)

$$\mathfrak{C} = 360 \frac{8{,}2}{2 \cdot 2{,}54} = 585 \text{ Kilo} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Die Resultate der vorstehenden Gleichungen I. und II. sind ziemlich übereinstimmend mit unsern Regeln; doch ist bei der Langonbrücke die Entfernung und entsprechend die Anstrengung der Nieten verhältnissmässig geringer, was insofern günstig wirkt, als die in Fig. 107 skizzirten Rippen nur einfache Nietreihen haben, welche in der Nähe der Gurtungen weit mehr in Anspruch genommen sind. — Wenn z. B. in einem bestimmten Querschnitte die Längenspannung am inneren Gurtungsrande 600 K., die vertikale Schubspannung der Wand ebendaselbst 300 K. beträgt, so ist nach Tabelle VI. die grösste schräge Wandspannung 724,2 K., während Durchmesser und Anzahl der Nieten dieselben sind, wie in der neutralen Axe, wo die grösste (Schub-) Spannung 439 K. beträgt; wir erhalten somit als Schubspannung in den der Gurtung zunächst befindlichen Nieten mit Benützung von obigen Gleichungen I. u. II.:

$$\mathfrak{C} = 724{,}2 \frac{585}{439} = 964 \text{ Kilo} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

In der Nähe der Mittelpfeiler, wo die Längenspannung bis 750 K. beziehungsweise 900 K. steigt, würden die fraglichen Nieten der Vertikalwand ganz ausserordentliche Anstrengung zu erleiden haben; es sind aber daselbst verstärkte Rippen angebracht (vergl. Fig. 108), welche mit doppelten Nietreihen versehen sind. — Hiedurch sind die betreffenden Nieten wesentlich entlastet; die schräge Wandspannung behält aber ihren oben berechneten Maximalwerth bei.

Fig. 108.

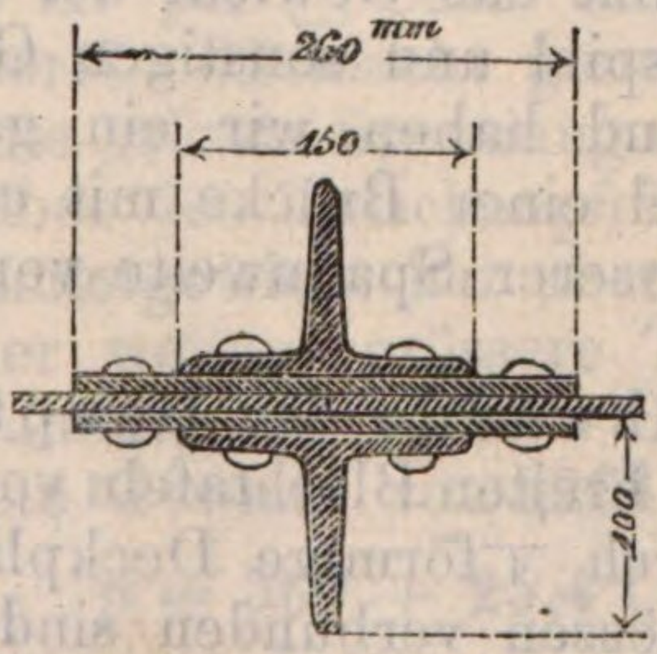
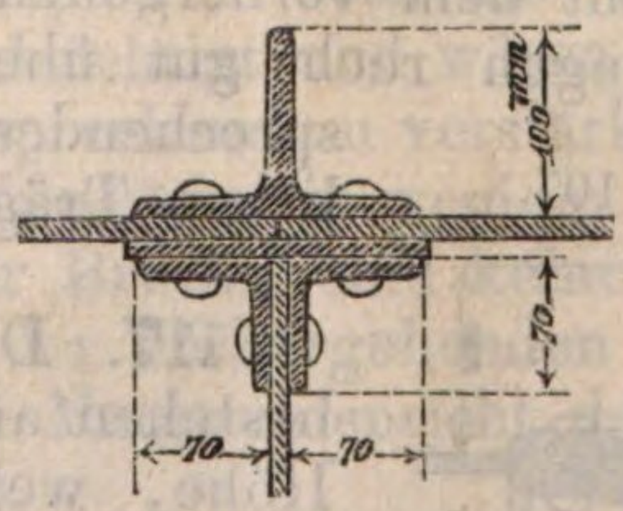


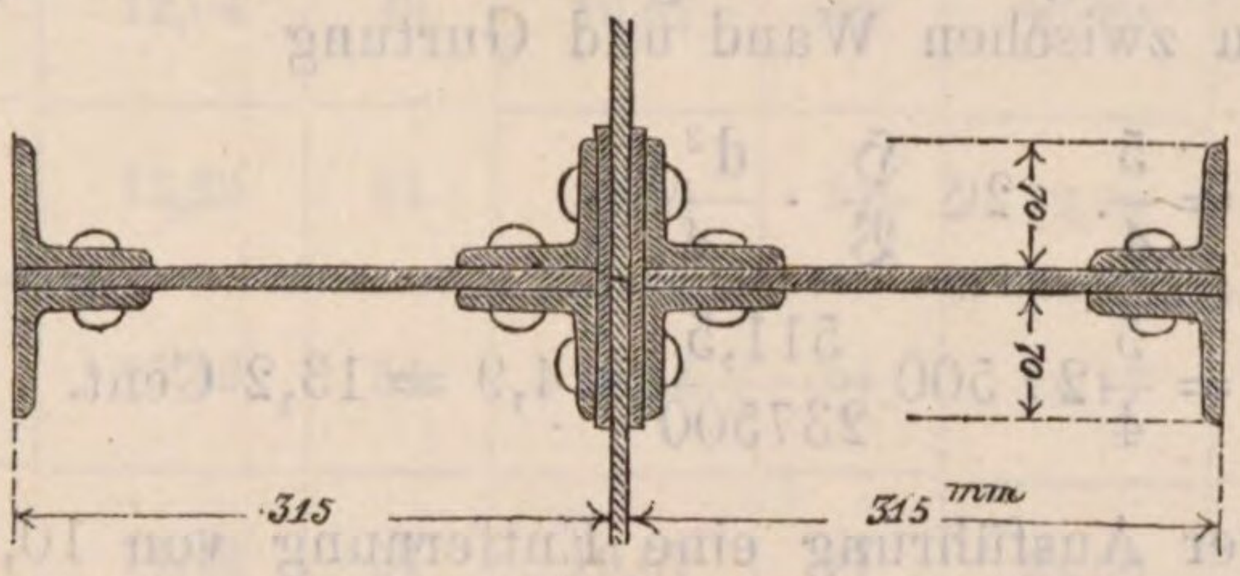
Fig. 109.



Wo die Querträger auf die nach Fig. 107 und 108 construirten Rippen treffen, ist das ⊤ Eisen einerseits durch 2 Winkel nebst Deckplatte ersetzt, wie Fig. 109. angibt.

Während bei der Britanniabrücke sämmtliche Vertikalrippen auf den grössten Theil der Länge gleich stark hergestellt wurden, — was sich in der Nähe der Pfeiler entschieden unzureichend gezeigt hat so dass daselbst weit stärkere Vertikalrippen angewendet werden mussten — so wurden bei der Brücke von Langon in Entfernungen von 5,16 M. stärkere Vertikalständer angebracht, welche zugleich zur Aufnahme je des zweiten Querträgers dienten, wie aus der Tafel VII. ersichtlich ist; der Querschnitt dieser Vertikalständer ist in Fig. 110 dargestellt.

Fig. 110.



Derartige stärkere Ständer sind auch auf den Pfeilern als Endständer angebracht, welche da, wo keine Querträger nothwendig waren, mittelst sogenannter Andreaskreuze zu einem sehr steifen Querverband benützt sind.

Die Eintheilung der in Fig. 107—110 dargestellten Vertikalrippen ist in der Tafel VII. gegeben. Es ist daselbst ersichtlich, dass auf einen Mittelpfeiler für jeden Träger 3 stärkere Absteifungen treffen, welche mit dem zwischen denselben befindlichen Wandstück den ganzen Pfeilerdruck aufzunehmen haben. — Der grösste Pfeilerdruck beträgt nach Tabelle XXXV. bei Belastung von 2 Oeffnungen 474,5 tons; der Querschnitt der Wandfläche ist (ohne Nietenabzug) 360 □ Cent., und wird durch besagte 3 Hauptständer auf etwa 900 □ Cent. erhöht, so dass die mittlere Pressung annähernd $\frac{474500}{900} = 527$ Kilo beträgt; die wirkliche Pressung ist jedoch in Folge der Verschwächung durch die Nieten wesentlich grösser. Es erhellt daraus insbesondere, dass der Druck auf die ganze Auflagerfläche vertheilt sein muss, wenn nicht einzelne Theile Noth leiden sollen und ist dadurch unser in N°. **85**. entwickeltes Rechnungsverfahren gerechtfertigt.

118. Was die Anordnung der Gurtungen betrifft, so ist dieselbe aus Tafel VII. ersichtlich und nur hinzuzufügen, dass durchweg beiderseitige Stossplatten angebracht sind; dieselben haben so viele Nieten hinter einander erhalten, dass die durchlaufende Eintheilung der Nieten beibehalten werden konnte; es ist diess nicht nur mit Rücksicht auf die Verschwächung durch die Nietlöcher, sondern auch wegen der Einfachheit der Ausführung vor-

theilhaft. Sämmtliche Gurtungsbänder haben dieselbe Länge von 5,16 M. erhalten, gleich der doppelten Querträgerdistanz.

Die Stärke der Nieten, welche zur Verbindung von Gurtung und Blechwand dienen, wurde aus der Grösse $\frac{d\mathfrak{M}}{dx}$ abgeleitet, indem die Schubspannung dieser Bolzen = 500 K. per □ Cent. gesetzt wurde; wir wissen dass dieser Ausdruck nach Gleichung 18) gleich der Vertikalkraft $\mathfrak{V}$ ist, deren Maximalwerth für einen Träger nach Tabelle XXXVI. und Gl. 106 = 64,08 . 9 — A = 64,0 . 5,9 — 140,5 = 237,5 tons beträgt.

Nach Gleichung 162) beträgt hier die Distanz D, der 2,5 C. starken Nieten zwischen Wand und Gurtung

$$D, = \frac{5}{4} \cdot \quad 2\mathfrak{C}\,\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}} \cdot \frac{d^2\pi}{4} \cdot$$

$$D, = \frac{5}{4} 2 \,.\, 500\,\frac{511{,}5}{237500} \cdot 4{,}9 = 13{,}2 \text{ Cent.}$$

während in der Ausführung eine Entfernung von 10,7 Cent. gewählt wurde; — beim Project wurden 8 Nieten per Längeneinheit berechnet, was einer Nietendistanz D, = 12,5 Cent. entspricht.

119. Die Anfertigung der Nieten ist vom grössten Einfluss auf die Solidität der Blechwandbrücken sowie auf die Kosten der Zusammensetzung derselben. Sie haben beim Bau der Langonbrücke und in der Beschreibung derselben die verdiente Sorgfalt gefunden.

Die Nietbolzen erhielten einen Durchmesser, der 1 Mm. geringer war, als das Loch das sie auszufüllen hatten; durch das beim Aushämmern des Nietkopfes hervorgebrachte Stauchen des glühenden Nietbolzens wird das Loch vollständig ausgefüllt und bleibt der Contact auch nach dem Erkalten, da die zu verbindenden Bleche an dieser Stelle gleichfalls eine erhöhte Temperatur angenommen haben und das Erkalten dieser Theile gleichzeitig vor sich geht. — Die Anwendung eines Spielraums von 1 Mm. ist in Frankreich allgemein üblich und kann man sich leicht durch Augenschein überzeugen, dass danach eingesetzte Nieten, wenn sie durch Lostrennen des Nietkopfes frei werden, das Nietloch vollständig ausfüllen. — Es muss desshalb der cylindrische Theil der Niete eine grössere Länge erhalten, als die Dicke der zu verbindenden Bleche nachweist, zu Anfertigung des 2. Kopfes ist ausserdem eine Länge gleich dem 1,1 fachen des Bolzendurchmessers hinzuzurechnen. — Molinos und Pronnier haben die folgende Tabelle veröffentlicht, wonach unter vorstehenden Voraussetzungen und auf Grund von Versuchen in den Werkstätten von Gouis & Comp. die Länge der Nietbolzen bestimmt worden sind.

Tabelle XXXVII.

Länge der zu verbindenden Bleche in Millimetern.	Nieten von 18 Mm. Durchmesser. 100 Nietköpfe wiegen 4,28 K.		Nieten von 20 Mm. Durchmesser. 100 Nietköpfe wiegen 5,87 K.		Nieten von 22 Mm. Durchmesser. 100 Nietköpfe wiegen 7,76 K.		Nieten von 25 Mm. Durchmesser. 100 Nietköpfe wiegen 11,39 K.	
	Länge d. Cylinders in Mm.	Gewicht von 100 Stück.	Länge des Cylinders.	Gewicht von 100 Stück.	Länge des Cylinders.	Gewicht von 100 Stück.	Länge des Cylinders.	Gewicht von 100 Stück.
15	42	12,04 K	45	16,14	45	20,50	51	29,28
18	45	12,64	48	16,87	48	21,39	54	30,16
21	48	13,23	51	17,60	51	22,28	57	31,31
24	51	13,82	54	18,34	54	23,17	60	32,46
27	54	14,42	57	19,07	57	24,06	63	33,61
30	57	15,01	60	19,80	60	24,94	66	34,76
33	60	15,61	63	20,54	63	25,83	69	35,91
36	63	16,19	66	21,27	66	26,72	72	37,05
39	66	16,77	69	22,00	69	27,61	75	38,20
42	72	17,94	72	22,74	72	28,49	78	39,35
45	75	18,53	75	23,47	75	29,38	81	40,50
48	78	19,11	78	24,20	81	30,27	87	42,79
51	81	19,61	81	24,44	84	31,16	90	43,94
54	84	20,28	84	25,67	87	32,05	93	45,09
57	87	20,86	87	26,40	90	32,94	96	46,23
60	90	21,45	90	27,13	93	33,82	99	47,38

Wir schliessen die Beschreibung dieser Brücke mit einer Uebersicht des Gewichts der einzelnen Constructionstheile. — Da die Blechdicke der Wand und die Stücke der Gurtungen (Kopfbleche und Winkel) durch die Formeln des §. 12 leicht gefunden werden, so kann diese Uebersicht zu annähernden Gewichtsberechnungen dienen.

Tabelle XXXVIII.

Bezeichnung der Bestandtheile.	Gewicht für 1 Geleise per lauf. Meter	
	in Kilogr.	im Ganzen.
1) Seitenwand.		
Blechtafeln	350,3	
Vertikalständer	396,3	
Nietenköpfe	30,0	
		776,6
2) Gurtungen.		
Kopfbleche und Winkel	829	
Stossplatten	78	
Nietenköpfe	32	
		939,0
3) Querträger, Schwellenträger und Verschiedenes	. . .	542,0
		2257,6

§. 14. Resultate für Blechwandbrücken.

120. Das Eigengewicht p darf per Längeneinheit constant angenommen werden.

Bezeichnet für eine bestimmte Brücke:

l die Spannweite, wobei bei continuirlichen Träger die mittlere Weite sämmtlicher verbundenen Oeffnungen gedacht ist,
F das Gewicht der Fahrbahn per l. Meter,
Cl das Gewicht der Hauptträger per l. Meter,

so ist nach N°. **66.**:

$$p = F + Cl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 103\,a)$$

Die Werthe von F sind in genannter Nummer für einige Grundtypen zusammengestellt, die Werthe des Coeffizienten C sind nach der Spannweite, nach der Construction und Zahl der Hauptträger verschieden und enthält folgende Tabelle XXXIX. Mittelwerthe für verschiedene Spannweiten und Anordnungen.

Tabelle XXXIX.

	Zahl der Träger für 2 Geleise.	Spannweite: 5 M.	7	10	15	20	30	40	60	100
Frei aufliegender Träger.	4	44	42	39	36	36	36	38	42	48
	3	42	40	38	33	33	33	35	39	44
	2	40	38	35	30	30	30	32	35	40
Continuirlicher Träger.	4	—	—	—	36	36	35	35	34	36
	3	—	—	—	33	33	32	32	31	33
	2	—	—	—	30	30	29	29	28	30

Bei kleineren Spannweiten sind die Tabellen XXIX. u. XXX. zur Gewichtsberechnung anzuwenden, da zusammengesetzte Träger für diese Weiten dasselbe Gewicht haben wie die homogenen doppel ⊤ förmigen Träger. — Wie sich die Gewichte der Hauptträger nach den einzelnen Bestandtheilen vertheilen, ist aus den Beispielen der vorhergehenden §§. für 2 verschiedene Fälle ersichtlich.

Die Eigengewichte von Strassenbrücken sind aus N°. **67.** und insbesondere aus Tabelle XIX. zu entnehmen.

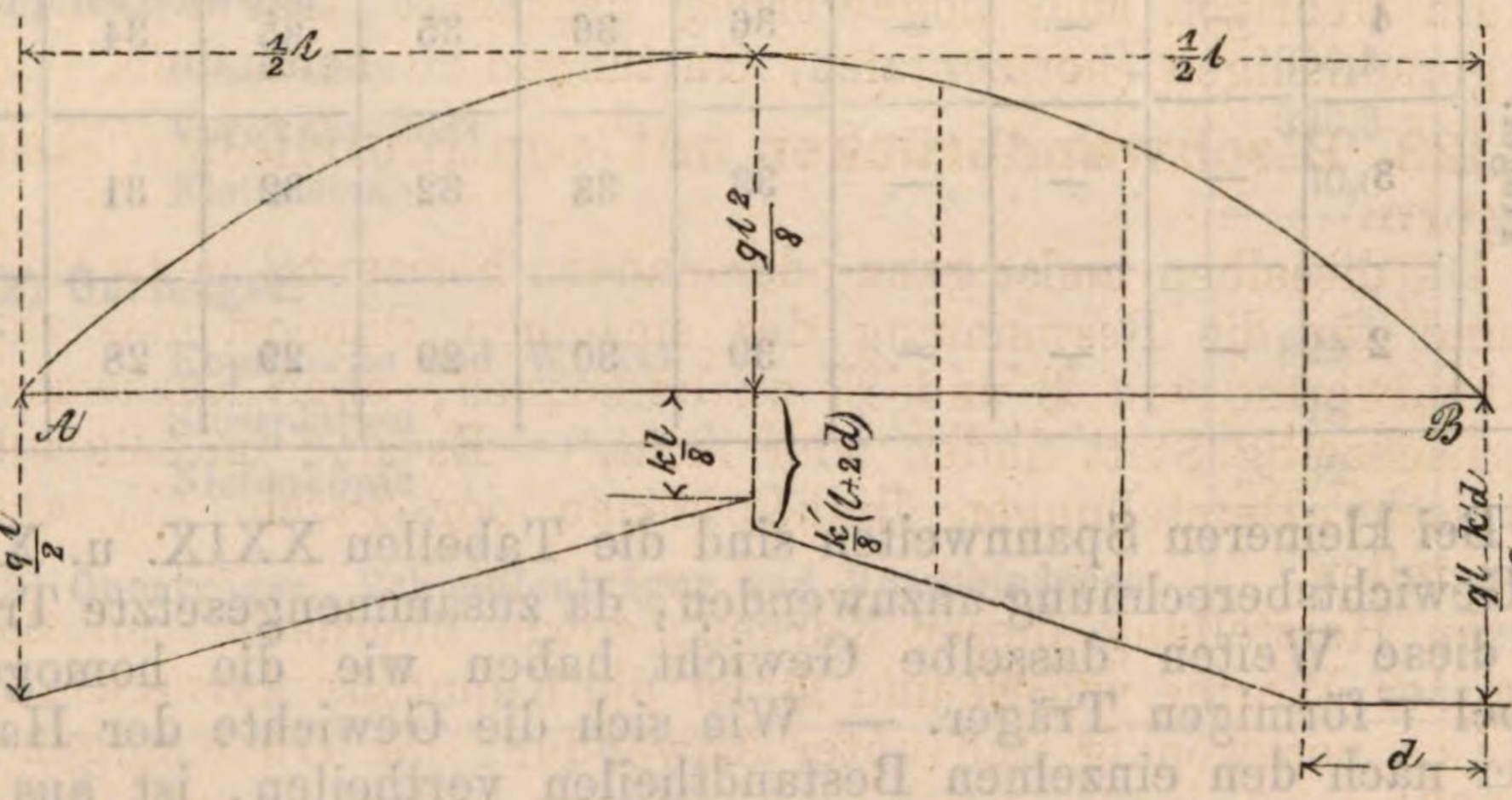
121. Bei Blechwandträgern geringer Spannweite (unter 7 M.) sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ wie bei homogenen Trägern zu berechnen; max $\mathfrak{M}$ und max $\mathfrak{V}$ finden sich für gewöhnliche Eisenbahnbrücken aus Tabelle XXX., beziehungsweise XXXI.; für besondere Fälle ist Tabelle XXVIII. anzuwenden, oder aber in andern Fällen auf das Hebelgesetz beziehungsweise Gleichung 100) bis 102) zurückzugehen. Die Gurtungs-Querschnitte beziehungsweise die Gurtungsspannungen finden sich allgemein nach Gleichung 31), für die meisten Fälle jedoch besser durch die Näherungsformel 150) beziehungsweise 158), wobei eine grösste Längenspannung von 600 Kilo per □ Cent. (nach Abzug der Nietlöcher) zulässig ist; die Wanddicke bestimmt sich nach Gleichung 145.) — Wo Stösse und sonstige Nietverbindungen vorkommen, sind die Regeln der N°. **55.** anzuwenden.

Für die Bestandtheile der Fahrbahn gelten die in §. 10. für homogene Träger entwickelten Regeln, wobei die grösste Längenspannung zu 500 K. per □ Cent. angenommen ist; hier ist insbesondere Tabelle XXIX anzuwenden.

122. Frei aufliegende Blechwandträger mittlerer und grösserer Spannweite.

Bei horizontalen Gurtungen ist die Blechwand von der Vertikalkraft $\mathfrak{V}$, die Gurtungsstärke von dem Angriffsmoment $\mathfrak{M}$ abhängig. Für Eisenbahnbrücken sind die einzelnen maassgebenden Werthe $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ durch beistehende Fig. 106 vollständig gegeben, wo die Werthe $\mathfrak{V}$ links ohne, rechts mit Berücksichtigung

Fig. 106.



der Querträgereintheilung verzeichnet sind; die einzelnen Werthe von k k_1 und q_1 sind hiebei aus Tabelle XVII. zu entnehmen.

Bei Strassenbrücken und überhaupt in besonderen Fällen sind die grössten Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ nach den Gleichungen 100) bis 102) zu berechnen.

Wenn $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ bekannt sind, so findet sich der Gurtungs-Querschnitt, beziehungsweise die Gurtungsspannung nach Gleichung 150) beziehungsweise 158), indem man nur in seltenen Fällen das Trägheitsmoment nach N°. **14.** entwickeln wird; als Längenspannung in den äussersten Fasern der Gurtungen ist hiebei 600 K. per □ Cent. zulässig, wenn die Nietlöcher in Abzug gebracht und überhaupt die Regeln der N°. **55.** berücksichtigt sind. — Die Wanddicke bestimmt sich wiederum nach Gleichung 145).

Für die Nietverbindungen sind die allgemeinen Regeln in N°. **55.** zusammengestellt; für die Nieten der vertikalen Wandstösse und deren Abstand sind besondere Regeln durch Gleichung 162) und 163) gegeben; ebenso für die horizontale Nietreihe, welche Blechwand und Gurtung verbinden, durch Gleichung 164).

Die Bestandtheile der Fahrbahn werden nach §. 10 berechnet, indem hier wie bei homogenen Trägern 500 K. per □ Cent. als grösste Längenspannung angenommen wird, für vorläufige Rechnungen können die Gewichtsberechnungen in N°. **66**. (beziehungsweise N°. **67**.) benützt werden; das Widerstandsmoment der einzelnen Theile wird häufig nach Tabelle XXIX. gefunden werden können.

Bei gekrümmten Gurtungen sind die Gurtungen und Wanddicken nach Anleitung von N°. **101**. zu berechnen; es ist hiebei vorausgesetzt, dass in den Formeln 160) und 161) gleichzeitige Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ eingesetzt werden; es ist in letzterer Beziehung auf die graphischen Darstellungen der Tafeln II. und III. und insbesondere auf die Ausführung des Beispiels in N°. **109**. zu verweisen.

Im Uebrigen sind bogenförmig begränzte Träger wie solche mit geradlienigen (horizontalen) Gurtungen zu behandeln.

123. Blechwandbrücken mit continuirlichen Hauptträgern.

Da dieselben meist ganz oder nahezu horizontal begränzt sind, so sind für die Bestimmung der einzelnen Dimensionen nur die Maximalwerthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ zu berechnen, ohne Rücksicht, ob sie gleichzeitig Statt finden oder nicht. — Es sind im Allgemeinen graphische Darstellungen ähnlich denen der Tafeln IV. und V. herzustellen.

Zu Herstellung dieser Kurven, sowie überhaupt zur Auffindung der Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ ist die Kenntniss der Auflagerdrücke nothwendig und unter Anwendung der Gleichungen 106) bis 109) genügend.

Die Auflagerdrücke werden gefunden

für 2 Oeffnungen:

bei gleicher Höhe der Stützpunkte nach Gleichung 104) beziehungsweise 105),

bei gesenkten Zwischenstützen nach Gleichung 117) und 118).

für 3 Oeffnungen:

bei gleicher Höhe der Stützpunkte nach Gleichung 123) beziehungsweise 124).

bei gesenkten Mittelstützen nach Gleichung 131) und 132).

für mehr als 3 Oeffnungen:

nach dem in N°. **21**. und **22**. entwickelten Verfahren von Clapeyron.

Es sind, wie in N°. **70**. und **77**. erläutert, stets eine oder mehrere Oeffnungen der Reihe nach belastet anzunehmen; die Werthe von q und p, welche hienach den einzelnen Werthen q_1 q_2 q_3 zu substituiren sind, sind in Tabelle XVII. für die gewöhnlichen Fälle, insbesondere für Projectirung neuer Brücken gegeben; sollen jedoch die Spannungen für eine bestimmte Belastung einer bestehenden Brücke berechnet werden, so sind für p und q

die wirklichen Werthe zu bestimmen und in die Formeln einzusetzen.

Ueber die Vortheile der Continuität ist in N°. **83.** sodann über die Senkung der Zwischenstützen in Tabelle XXI. und Tabelle XXV.—XXVIII. das Wichtigste angeführt.

Wenn die grössten Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ bekannt sind, so ist die Berechnung der Gurtungen und Blechwanddicken dieselbe wie bei freitragenden Trägern mit geraden Gurtungen, wesshalb in dieser Beziehung auf die vorhergebende Nummer verwiesen wird. — Dasselbe gilt auch von der Berechnung der Fahrbahnbestandtheile.

Anhang.

§. 15. Vergleichung der Maasse und Gewichte verschiedener Länder.

Tabelle XL.

Fusstabelle.

Englischer Fuss	Preussischer Fuss	Oesterr. Fuss	Badischer und Schweizer Fuss	Pariser Fuss	Französischer Meter
à 12 Zoll.	à 12 Zoll.	à 12 Zoll.	à 10 Zoll.	à 12 Zoll.	à 100 Cent.
1	0,9711	0,9642	1,0160	0,9383	0,3048
1,0297	1	0,9929	1,0462	0,9662	0,3138
1,0371	1,0072	1	1,0537	0,9731	0,3161
0,9843	0,9559	0,9490	1	0,9235	0,3000
1,0658	1,0350	1,0276	1,0828	1	0,3248
3,2809	3,1862	3,1634	3,3333	3,0784	1

Nordamerika wie England,
Russland wie England,
Holland, Belgien wie Frankreich,
Preussen — rheinischer Fuss;

ferner ist:

1 sächsischer	Fuss	= 0,2832	Meter	1 Meter = 3,5312	Fuss sächsisch
1 hannover.	„	= 0,2921	„	1 „ = 3,4236	„ hannover.
1 württemb.	„	= 0,2865	„	1 „ = 3,4905	„ württemb.
1 bayrischer	„	= 0,2919	„	1 „ = 3,4263	„ bayrisch.

Tabelle XLI.

Gewichtstabelle.

Englisches Pfund = $\frac{1}{2240}$ tons.	Zollpfund = $\frac{1}{100}$ Ctr.	Kilogramm = $\frac{1}{1000}$ tonnes.
1	0,9072	0,4536
1,1023	1	0,5000
2,2046	2,0000	1

Nordamerika wie England,
Belgien, Holland wie Frankreich.

1 altes Pfund österreichisch = 0,560 Kil.
1 „ „ preussisch = 0,4677 „
1 „ „ französisch = 0,4895 „

Tabelle XLII.

Quadratfusstabelle.

Englischer Quadratfuss.	Preussischer Quadratfuss.	Oesterr. Quadratfuss.	Badischer oder Schweizer Quadratfuss.	Pariser Quadratfuss.	Quadrat-meter.
1	0,9431	0,9297	1,0322	0,8804	0,0929
1,0603	1	0,9858	1,0945	0,9335	0,0985
1,0756	1,0144	1	1,1103	0,9470	0,0999
0,9688	0,9137	0,9007	1	0,8529	0,0900
1,1359	1,0712	1,0560	1,1724	1	0,1055
10,7643	10,1519	10,0074	11,1111	9,4768	1

1 Quadratfuss sächsisch = 0,0802 Quadratmeter
1 „ hannover. = 0,0853 „
1 „ württemb. = 0,0821 „
1 „ bayrisch = 0,0852 „

1 Quadratmeter = 12,4694 Quadratfuss sächsisch
1 „ = 11,7207 „ hannover.
1 „ = 12,1837 „ württemb.
1 „ = 11,7396 „ bayrisch

Tabelle XLIII.

Cubikfusstabelle.

Englischer Cubikfuss.	Preussischer Cubikfuss.	Oesterr. Cubikfuss.	Badischer oder Schweizer Cubikfuss.	Pariser Cubikfuss.	Cubikmeter.
1	0,9159	0,8964	1,0487	0,8261	0,0283
1,0918	1	0,9787	1,1450	0,9019	0,0309
1,1156	1,0217	1	1,1699	0,9215	0,0316
0,9535	0,8733	0,8548	1	0,7877	0,02700
1,2106	1,1087	1,0851	1,2695	1	0,0343
35,3166	32,3459	31,6578	37,0370	29,1738	1

1 Cubikfuss sächsisch = 0,0227 Cubikmeter
1 „ hannover. = 0,0249 „
1 „ württemb. = 0,0235 „
1 „ bayrisch = 0,0249 „

1 Cubikmeter = 44,0318 Cubikfuss sächsisch
1 „ = 40,1263 „ hannover.
1 „ = 42,5275 „ württemb.
1 „ = 40,2235 „ bayrisch

Tabelle XLIV.

Gewicht per Quadrateinheit nach den landesüblichen Maassen.

(Unter Zugrundlegung des Zollgewichts für die deutschen Staaten.)

Englisch	Preussisch	Oesterreichisch	Badisch	Französisch
Tonne per Quadratzoll.	Pfund per Quadratzoll.	Pfund per Quadratzoll.	Pfund per Quadratzoll.	Kilogramm per Quadratcentim.
1	2154,6	2185,8	2834,9	157,49
0,000464	1	1,014	1,316	0,0731
0,000457	0,986	1	1,297	0,0720
0,000353	0,760	0,771	1	0,0555
0,006349	13,681	13,879	18,000	1

1 Zollpfund pro Quadratzoll sächsisch = 0,0898 Kilo pro Quadratcent.
1 „ „ „ hannover. = 0,0845 „ „ „
1 „ „ „ württemb. = 0,0609 „ „ „
1 „ „ „ bayrisch = 0,0845 „ „ „

1 Kilo pro Quadratcent. = 11,138 Zollpfund pro Quadratzoll sächsisch
1 „ „ „ = 11,850 „ „ „ hannov.
1 „ „ „ = 16,416 „ „ „ württ.
1 „ „ „ = 11,831 „ „ „ bayrisch

Anmerk. Bei Berechnungen der per Quadrateinheit wirkenden Kraft findet sich häufig noch älteres preussisches und österreichisches Gewicht.

1 Kilo pro Quadratcent. = 14,62 Pfd. alt preussisch pro Quadratzoll
1 „ „ „ = 12,93 „ „ österreich. „ „
1 Pfd. alt preussisch pro Quadratzoll = 0,0684 Kilo pro Quadratcent.
1 „ „ österreich. „ „ = 0,0555 „ „ „

Tabelle XLV.

Gewicht per Längeneinheit nach den landesüblichen Maassen.

(Unter Zugrundlegung des Zollgewichts für die deutschen Staaten.)

Englisch	Preussisch	Oesterreichisch	Badisch	Französisch
Tonne per laufenden Fuss	Pfund per laufenden Fuss.	Pfund per laufenden Fuss.	Pfund per laufenden Fuss.	Kilogramm per laufenden Meter.
1	2092,5	2107,6	2000,2	3333,6
0,00048	1	1,0072	0,956	1,593
0,00047	0,993	1	0,949	1,582
0,0005	1,046	1,054	1	1,667
0,0003	0,628	0,632	0,6	1

1 Zollpfund pro lfd. Fuss sächsisch = 1,765 Kilo pro lfd. Meter
1 „ „ „ hannover. = 1,712 „ „ „
1 „ „ „ württemb. = 1,745 „ „ „
1 „ „ „ bayrisch = 1,713 „ „ „
1 altes preuss. Pfd. pro lfd. Fuss = 1,490 „ „ „
1 „ österr. „ „ „ = 1,772 „ „ „
1 Kilo pro lfd. Meter = 0,566 Zollpfund pro lfd. Fuss sächsisch
1 „ „ „ = 0,584 „ „ „ hannover.
1 „ „ „ = 0,573 „ „ „ württemb.
1 „ „ „ = 0,583 „ „ „ bayrisch
1 „ „ „ = 0,671 alt preuss. Pfd. pro lfd. Fuss
1 „ „ „ = 0,564 „ österr. „ „ „ „

Bei Gewichtsberechnungen kann man mittelst Tabelle XLIII. alle Cubikmaasse auf Cubikdecimeter reduciren. Ein Cubikdecimeter Wasser wiegt 1 Kilo, und kann man die so erhaltenen Kilogramme mittelst Tabelle XLI. auf die andern Gewichtseinheiten zurückführen. — Das Gewicht des gleichen Volums Wasser gibt

das wirkliche Gewicht des fraglichen Körpers mittelst folgender Tabelle:

Tabelle XLVI.

Specifische Gewichte verschiedener Körper.

Wasser	1,0
Tannenholz	0,47—0,55
Tanne frisch gefällt bis .	0,9
Eichenholz	0,65—0,80
Gusseisen	7,2
Schmiedeisen	7,8
Gussstahl	7,9

Zur Bequemlichkeit bei Gewichtsberechnungen dürften noch folgende Angaben von Werth sein:

1	Cubikdecimeter	Wasser	wiegt	1	K. =	1,000	Kilo
1	Cubikzoll	engl.	„	0,0162	K. =	0,0357	Pf. engl.
1	„	preuss.	„	0,01788	K. =	0,03576	Zollpfd.
1	„	österr.	„	0,01829	K. =	0,03657	„
1	„	badisch	„	0,027	K. =	0,0540	„
1	„	württ.	„	0,0235	K. =	0,0468	„
1	„	sächs.	„	0,0131	K. =	0,0262	„
1	„	hannov.	„	0,0144	K. =	0,0288	„
1	„	bayrisch	„	0,0249	K. =	0,0498	„

Druckfehler und Berichtigungen.

Da die meisten Druckbogen seit längerer Zeit fertig vorliegen, so konnten wir Druckfehler und sonstige Uebersehen möglichst vollständig verbessern; wir bitten die folgenden Berichtigungen durchgehen, beziehungsweise im Texte nachtragen zu wollen.

Seite 6, Zeile 5, „zu“ fällt aus.
„ 14, „ 22 lies: Berührungsfläche statt Berechnungsfläche.
„ 16, „ 17 lies: sämmtlicher Spannungen und Pressungen.
„ 18, Fig. 6 lies: Offener Balken.
„ 19, „ 12 lies: $(\alpha^3\beta - \alpha,^3\beta,)$ anstatt $(\alpha^3\beta - \alpha,^3\beta)$.
„ 21, Zeile 11 von unten lies: „$98.1.y_2$“ anstatt „$98 \,.\, 2 \,.\, y_2$.“
„ 22—25. Es soll durchaus anstatt $\mathfrak{H}$ das Zeichen $\mathfrak{H}_0$ gesetzt sein, insbesondere auch in den Figuren 17. und 18.
„ 25. In den Gleichungen 38) und 39) sind aus Versehen die Grössen $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{b}_0$ weggeblieben und sprechen sich diese Gleichungen richtig aus wie folgt:

$$\Theta = \mathfrak{H}_0\mathfrak{a}_0\,(\Omega_\mathfrak{a} + {}^1/_3\,\delta\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{H}_0\mathfrak{b}_0\,(\Omega_\mathfrak{b} + {}^1/_3\,\delta\mathfrak{b}_0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 38)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{H}_0\mathfrak{a}_0\,(\Omega_\mathfrak{a} + {}^1/_3\,\delta\mathfrak{a}_0) = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{H}_0\mathfrak{b}_0\,(\Omega_\mathfrak{b} + {}^1/_3\,\delta\mathfrak{b}_0) \\ \mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{H}_0\mathfrak{b}_0\,(\Omega_\mathfrak{b} + {}^1/_3\,\delta\mathfrak{b}_0) = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{H}_0\mathfrak{a}_0\,(\Omega_\mathfrak{a} + {}^1/_3\,\delta\mathfrak{a}_0) \end{aligned}\right\} \; . \; . \; 39)$$

Seite 27, Zeile 19 und folgende lies:
Gl. 22) anstatt Gl. 14).
Gl. 31) anstatt Gl. 20).
„ 27, Zeile 7 von unten lies: Gl. 40) anstatt Gl. 21).
„ 30, „ 13 lies: „A und B die Vertikalkräfte zunächst den Stützpunkten“ anstatt „die Auflagerdrücke auf den Stützpunkten.“
„ 30, „ 17 lies: „α und α, die Tangenten der Winkel“ anstatt „die Winkel.“
„ 30, „ 7 und 9 von unten lies: A anstatt $\mathfrak{A}$.
„ 31, „ 9 ist auf der linken Seite der Gleichung y statt x zu setzen und die Gleichung mit V^a zu bezeichnen.
„ 32, „ 13 von unten lies: „die Tangenten der Winkel“ statt „die Tangentenwinkel.“
„ 33, In Gl. 44 soll statt des lateinischen Buchstaben k das griechische $\varkappa$ stehen.
„ 35, Zeile 2 von unten lies: „auf die neutrale Axe“ statt „auf eine durch y gelegte Axe.“
„ 38, „ 2 von unten lies: Gl. 51, anstatt Gl. 21.
„ 39, Gleichung 54) hat keine praktische Bedeutung, wie aus der folgenden Entwicklung hervorgeht.

Seite 40; Gl. 56) soll heissen:

$$\mathfrak{S}_0 \leqq 0{,}6\ \mathfrak{A}_0 \leqq 0{,}6\ \mathfrak{B}_0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 56)$$

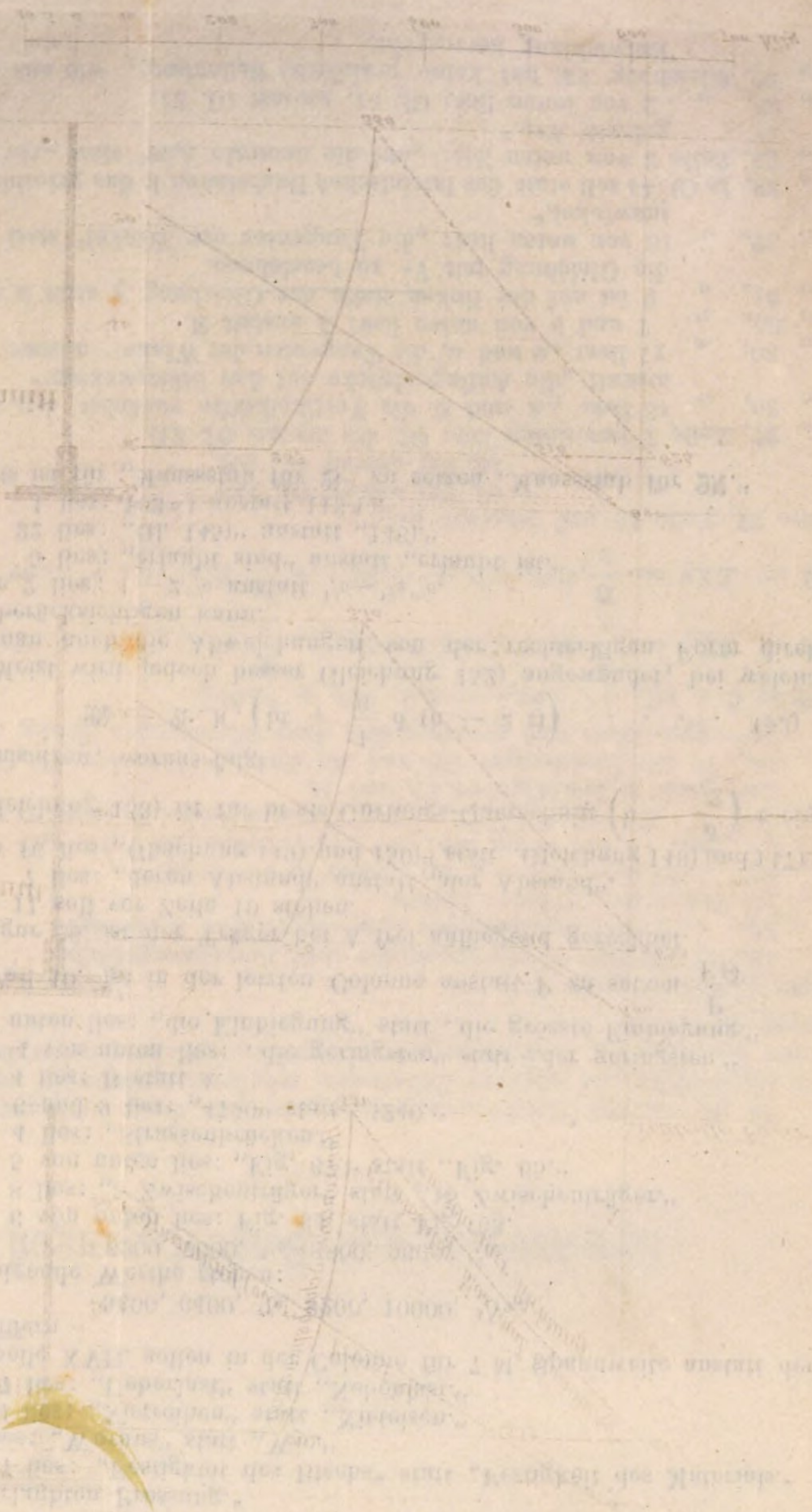
„ 49, Zeile 16 lies Gl. 63 statt 63a.
„ 51, oben lies: l = 18,77 M. statt L = 18,77 M.
„ 55, Zeile 14 von unten lies: „wirklich vorhandenen grössten Pressung“ statt „erlaubten Pressung.“
„ 72, „ 17 lies: „Festigkeit des Blechs“ statt „Festigkeit des Materials.“
„ 74, oben lies: „Woraus“ statt „Wie.“
„ 75, Zeile 14 lies: „Nietreihen“ statt „Nieteisen.“
„ 83, „ 7 lies: „Ueberlast“ statt „Nebenlast.“
„ 93, In Tabelle XVII. sollen in der Colonne für 7 M. Spannweite anstatt der Ziffern
5600, 6400, 1/8, 9200, 10000, 1/12,5.
folgende Werthe stehen:
6200, 7000, 1/9, 8800, 9600, 1/12.
„ 100, Zeile 6 von unten lies: Fig. 64. statt Fig. 63.
„ 102, „ 8 lies: „5 Zwischenträger“ statt „15 Zwischenträger.“
„ 102, „ 5 von unten lies: „Fig. 67.“ statt „Fig. 65.“
„ 104, „ 4 lies: „Strassenbrücken.“
„ 104, „ 6 und 9 lies: „4790“ statt „1240.“
„ 122, „ 4 lies: B statt A.
„ 127, „ 4 von unten lies: „die geringsten“ statt „der geringsten.“
„ 145, ganz unten lies: „die Einbiegung“ statt „die grösste Einbiegung.“
„ 145, bei Fall 10. ist in der letzten Colonne anstatt P zu setzen $\frac{P}{E\Theta}$.
„ 146, in Figur 86. ist der Träger bei A frei aufliegend gerechnet.
„ 147, Zeile 11 soll vor Zeile 10 stehen.
„ 150, „ 7 lies: „deren Abstand“ anstatt „der Abstand“.
„ 156, Zeile 16 lies „Gleichung 149) und 150)“ statt „Gleichung 146) und 147).“
„ 156. In Gleichung 153) ist für bt als Gurtungs-Querschnitt $\left(b - \frac{\delta}{2}\right) t$ einzusetzen, woraus folgt

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \,.\, h \,.\left(bt + \frac{1}{6}\,\delta\,(h - 2\,t)\right) \quad . \ . \ . \ . \quad 153)$$

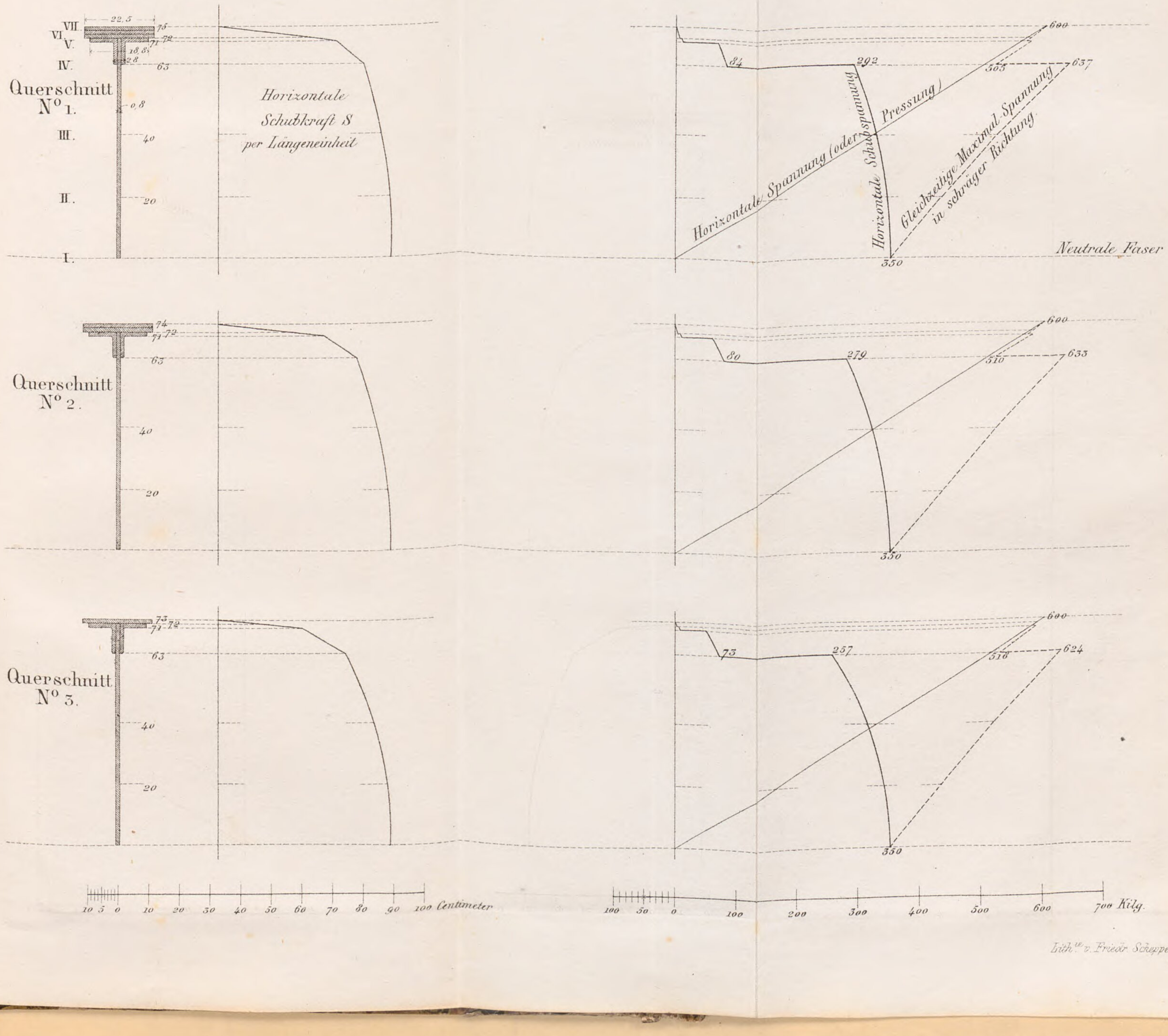
Meist wird jedoch besser Gleichung 152) angewendet, bei welcher man auch die Abweichungen von der rechteckigen Form direkt berücksichtigen kann.

„ 157, Zeile 2 lies: 1—2 % anstatt 1/5—1/2 %.
„ 161, „ 5 lies: „erlaubt sind“ anstatt „erlaubt ist.“
„ 172, „ 22 lies: „Gl. 145)“ anstatt „143).“
„ 187, „ 1 lies: 103 a) anstatt 113 a).

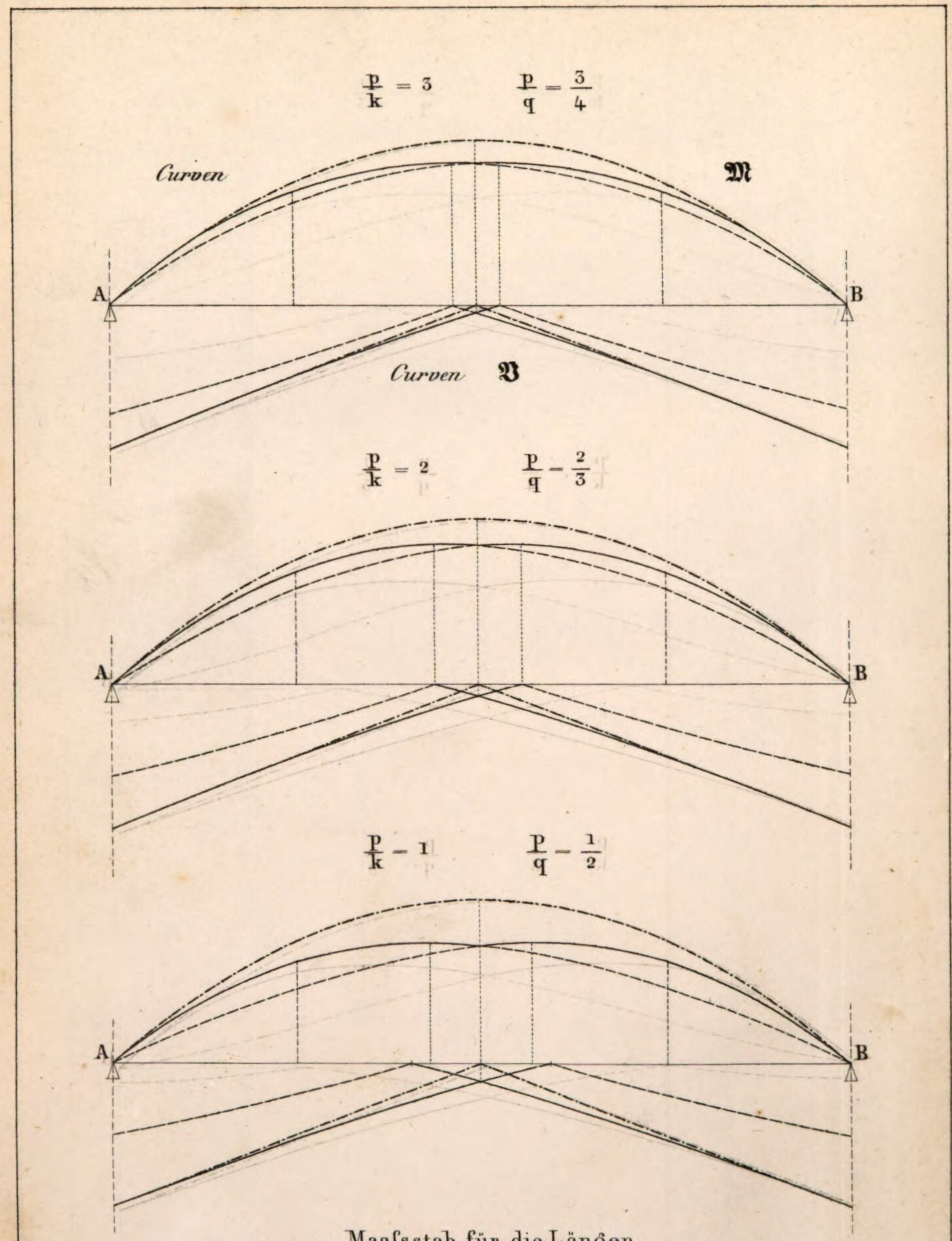
Tafel V. rechts ist für „Maassstab für $\mathfrak{B}$“ zu setzen „Maassstab für $\mathfrak{M}$.“



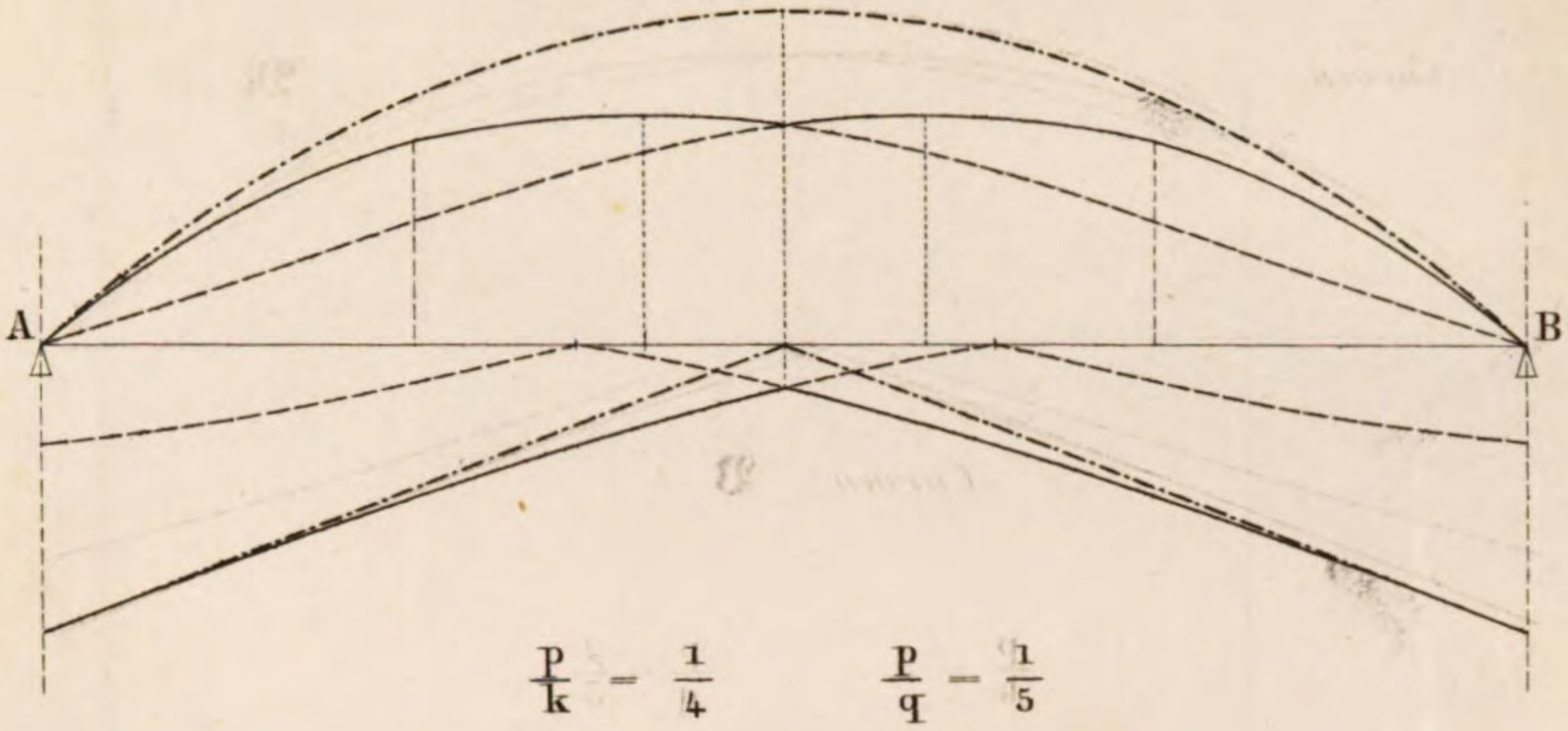
Berechnung der Maximalspannungen für eine Blechbalkenbrücke von 15 m Spannweite.



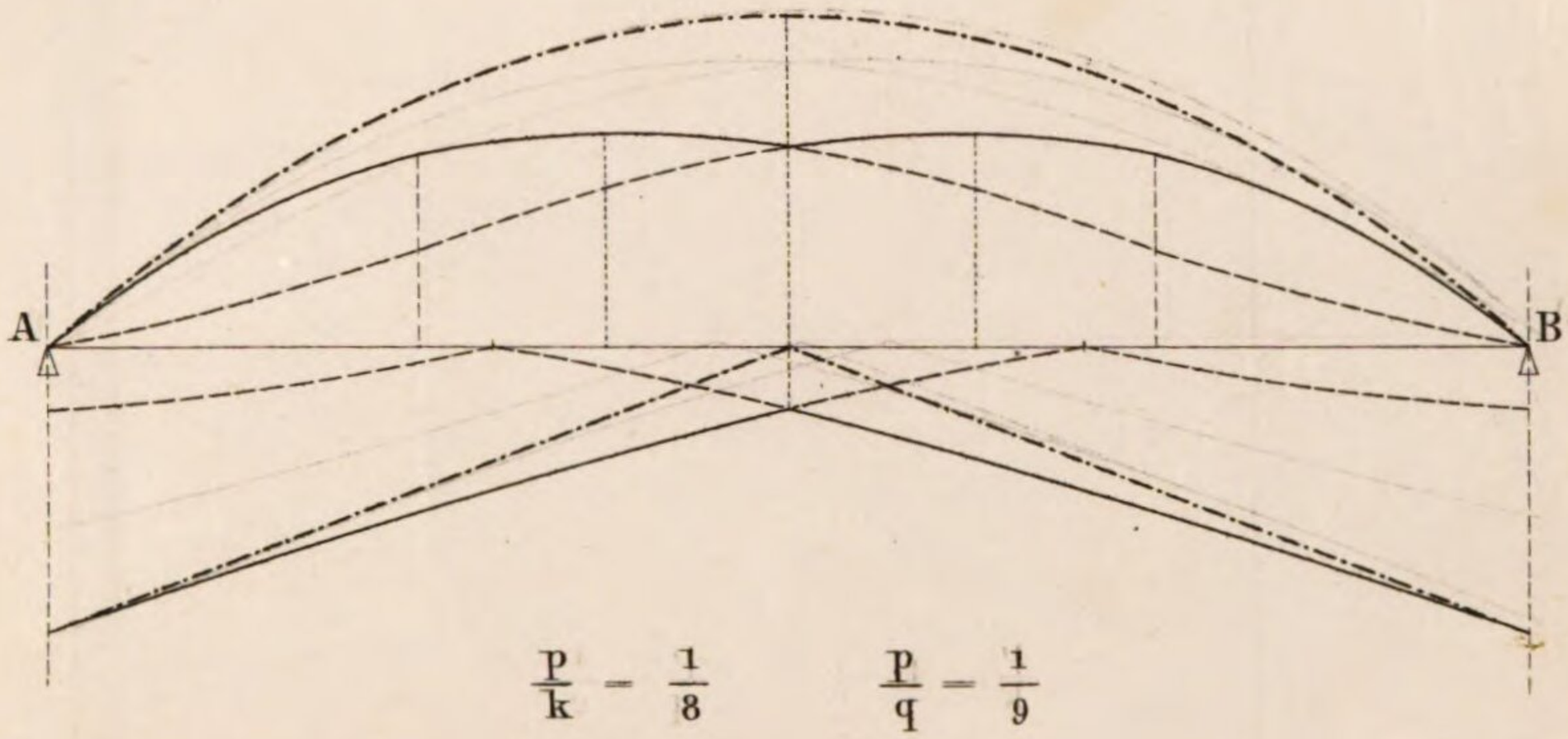
Lith.te v. Friedr. Schepperlen in Stuttgart.


$\frac{p}{k} = 3$
$\frac{p}{q} = \frac{3}{4}$
Curven M
A
B
Curven V
$\frac{p}{k} = 2$
$\frac{p}{q} = \frac{2}{3}$
A
B
$\frac{p}{k} = 1$
$\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$
A
B
Maafsstab für die Längen
0.1
0.3
0.5
1.0 l
Maafsftab für V
0.5
1.0 ql

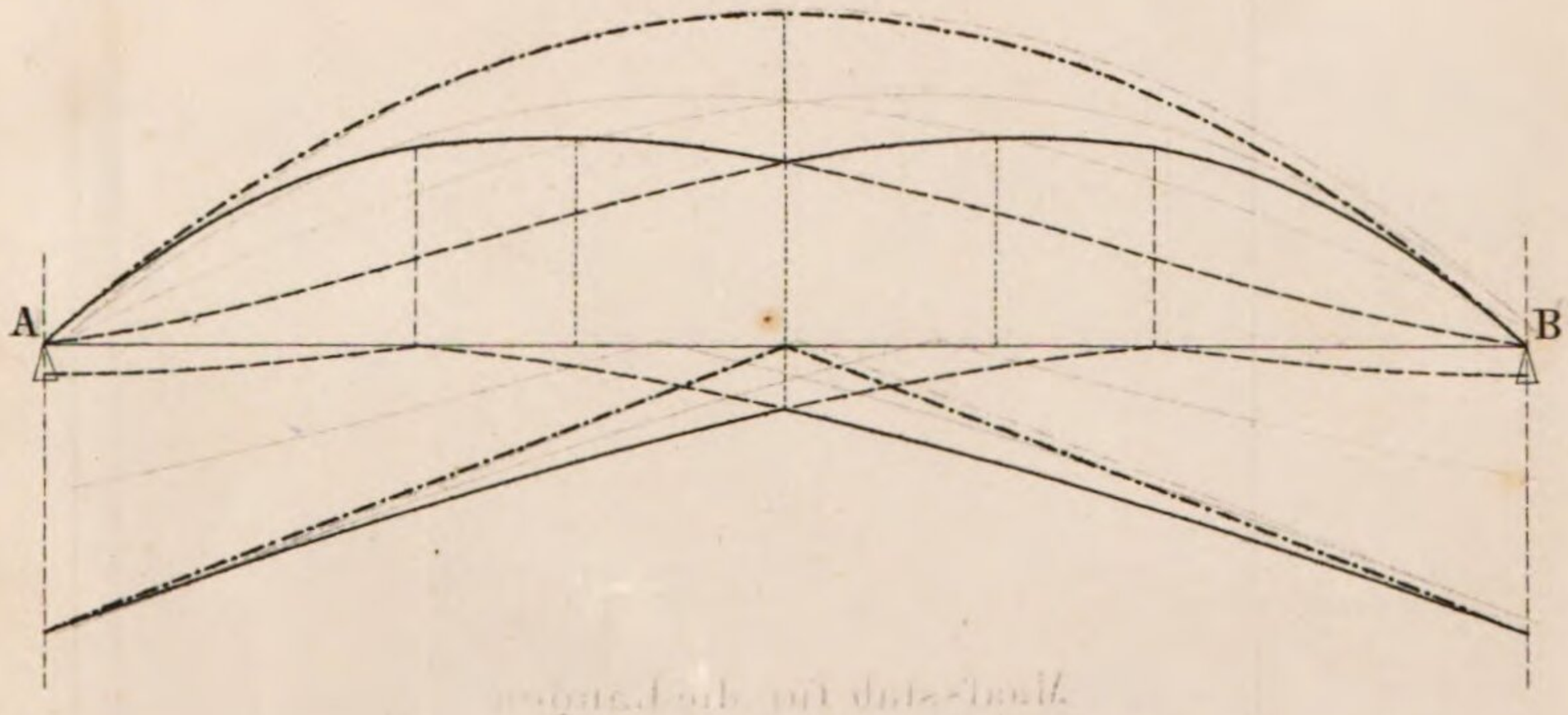
$\frac{p}{k} = \frac{1}{2}$ $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$



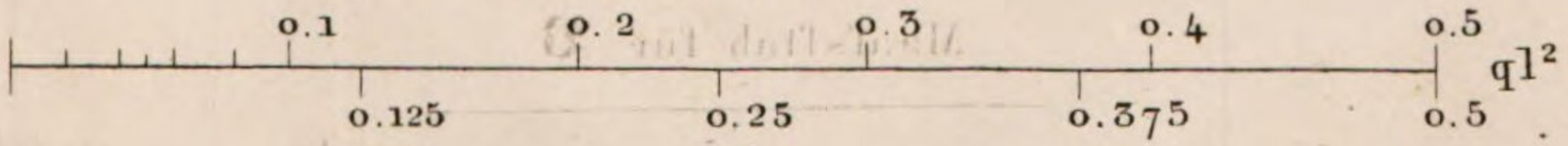
$\frac{p}{k} = \frac{1}{4}$ $\frac{p}{q} = \frac{1}{5}$



$\frac{p}{k} = \frac{1}{8}$ $\frac{p}{q} = \frac{1}{9}$



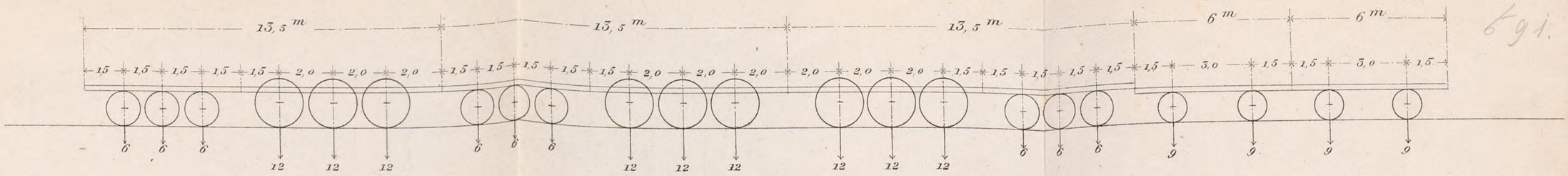
Maafsftab für $\mathfrak{M}$

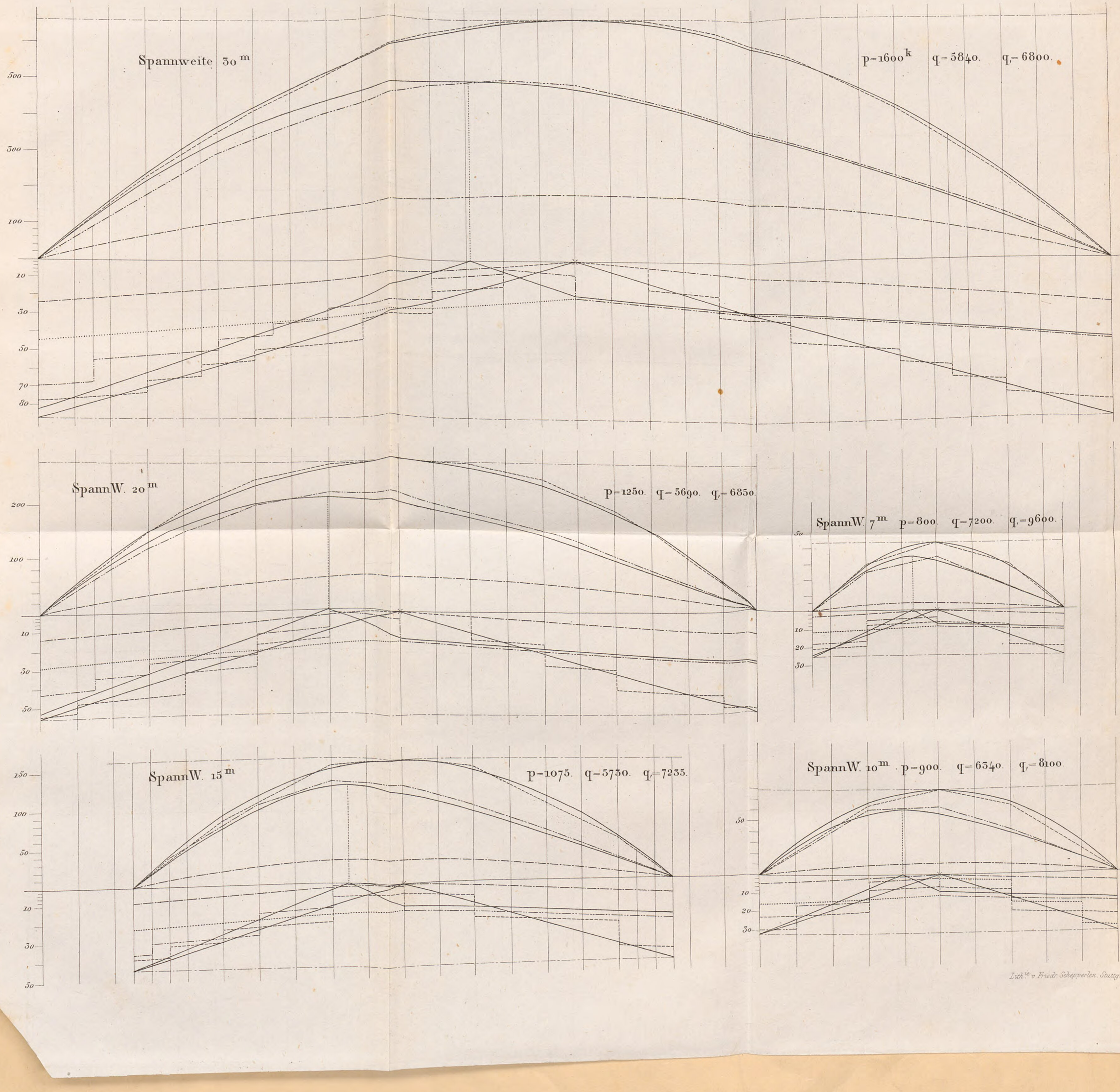


Lith.ie v. Fr. Schepperlen. Stuttgt.

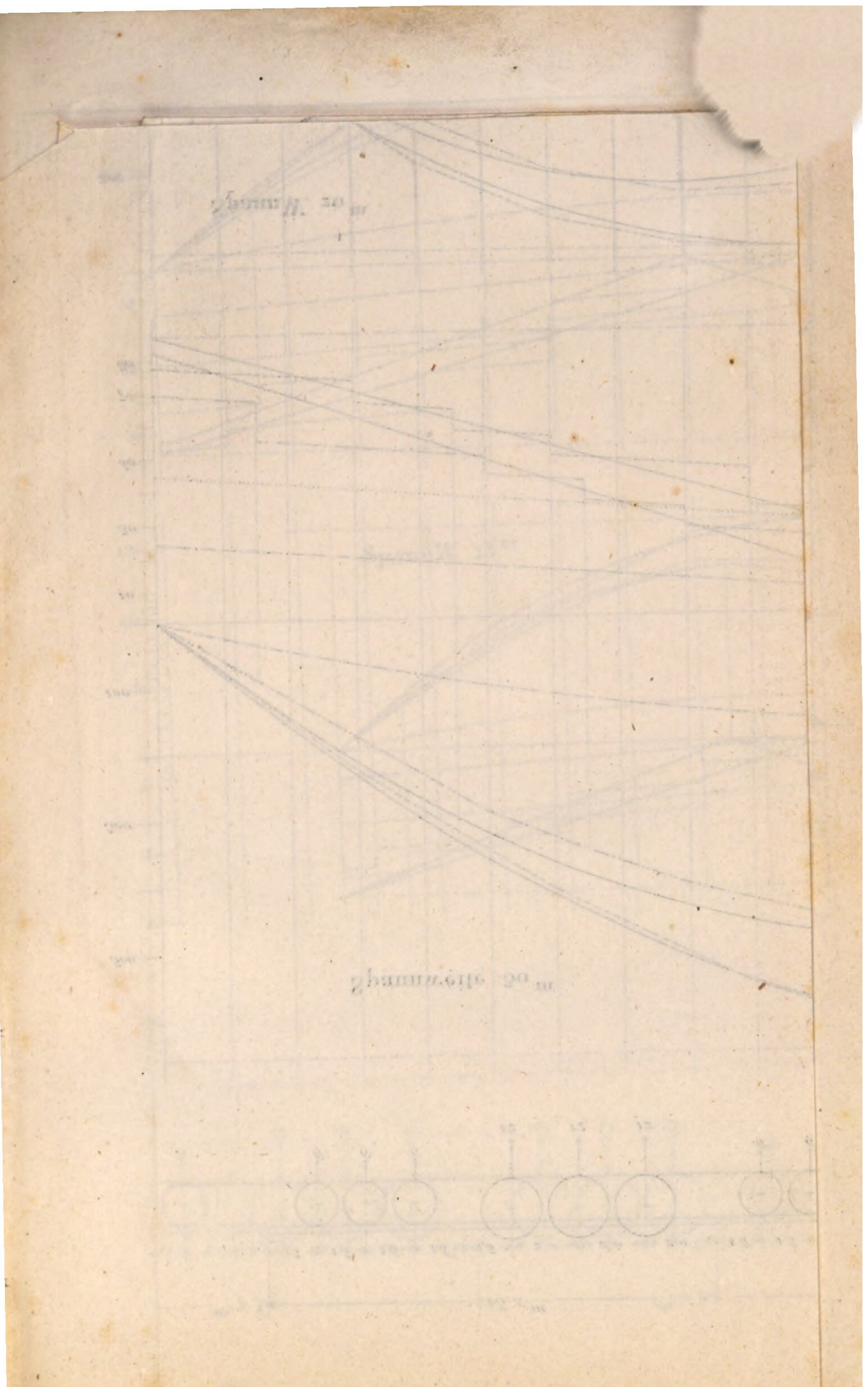
Tafel III.

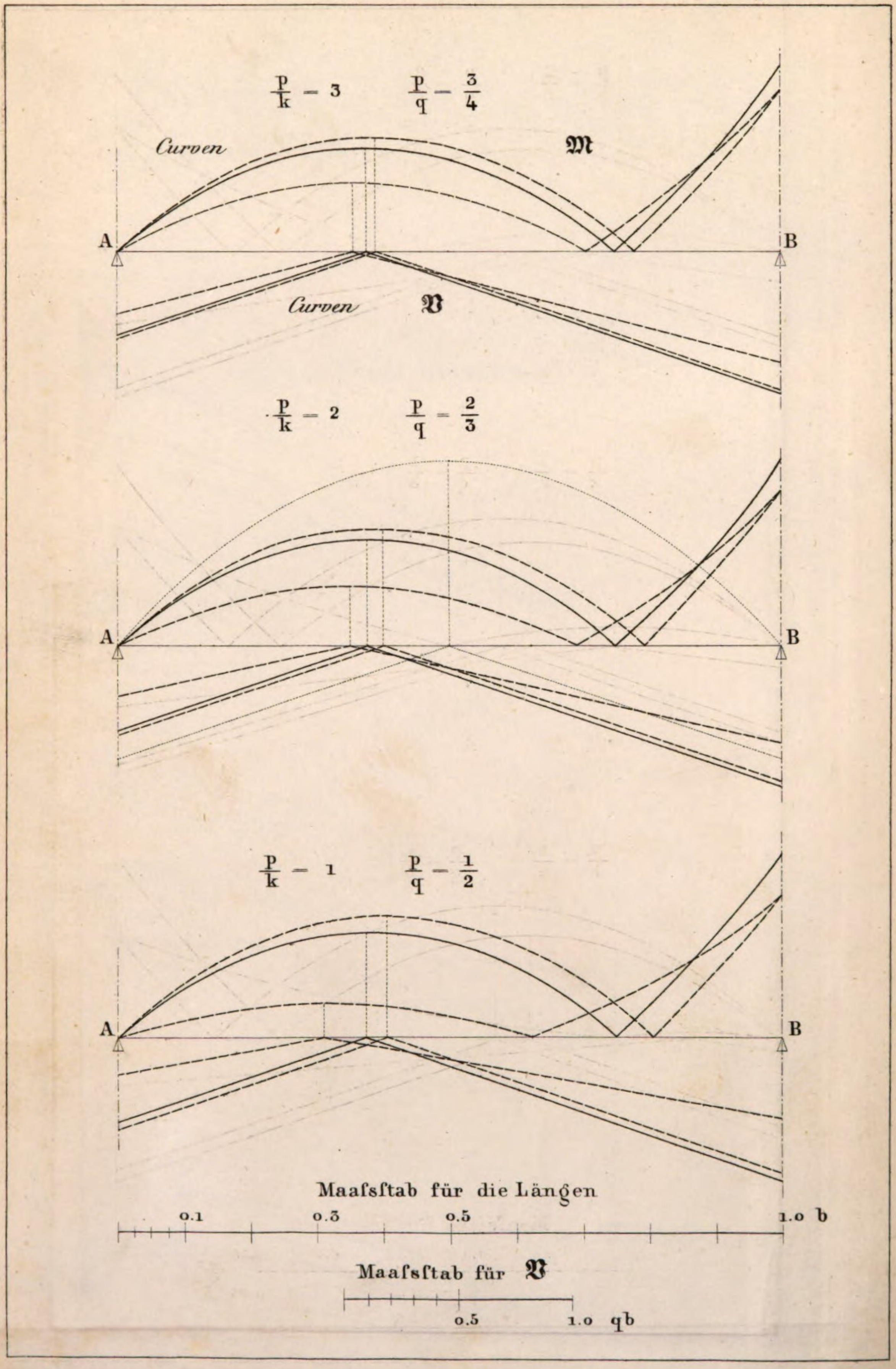
691.

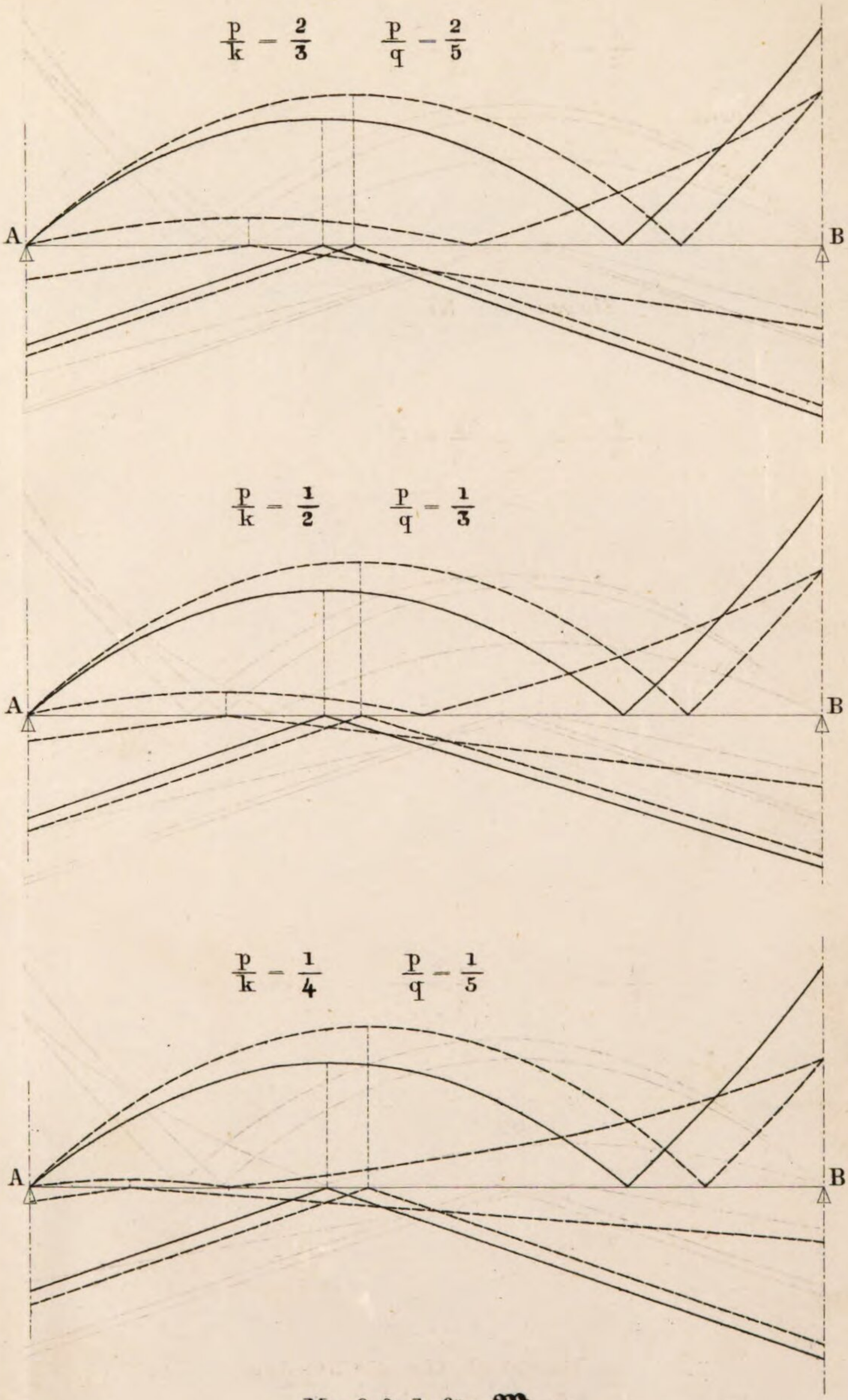




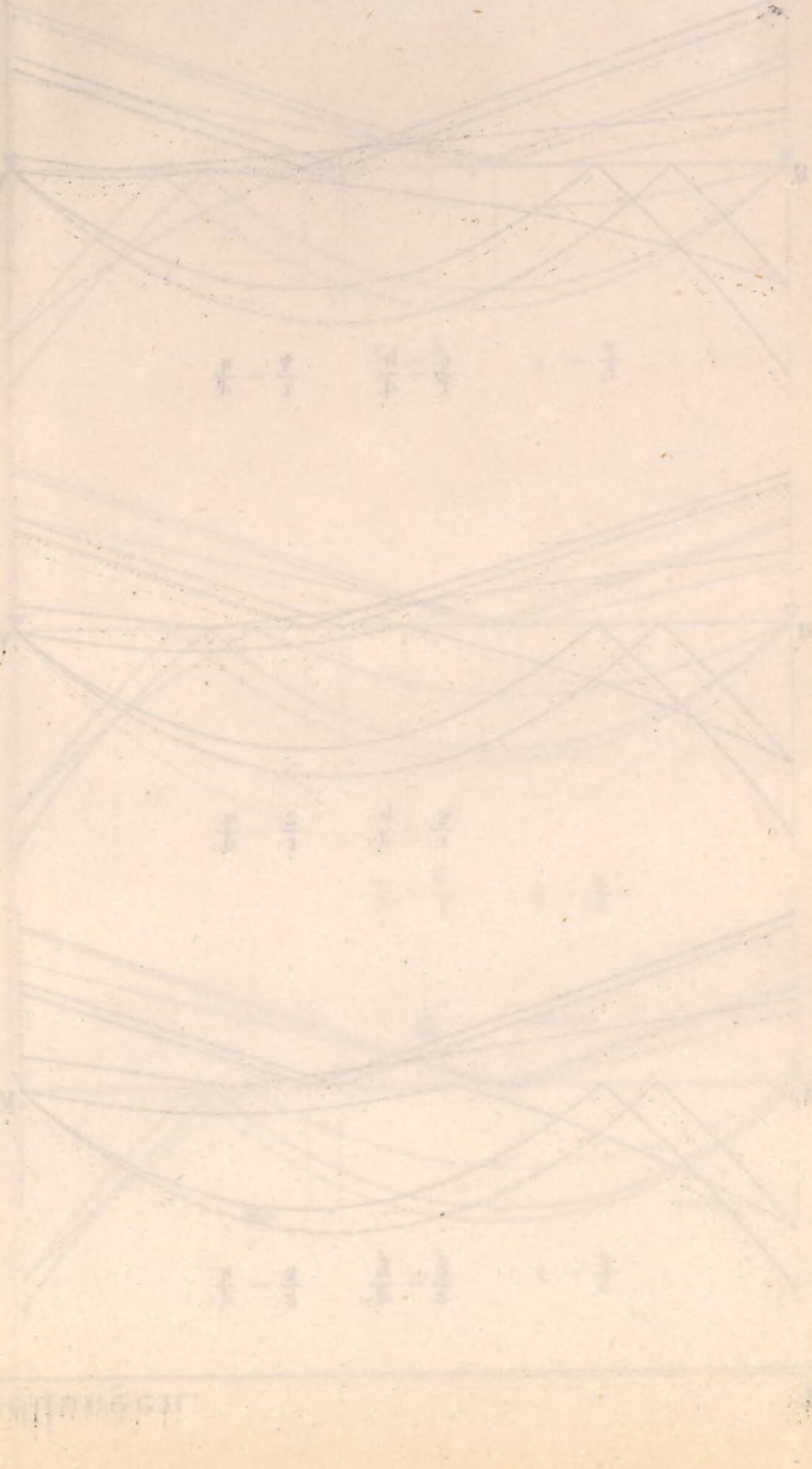
Lith.ce v Friedr. Scheppelen. Stuttgt.



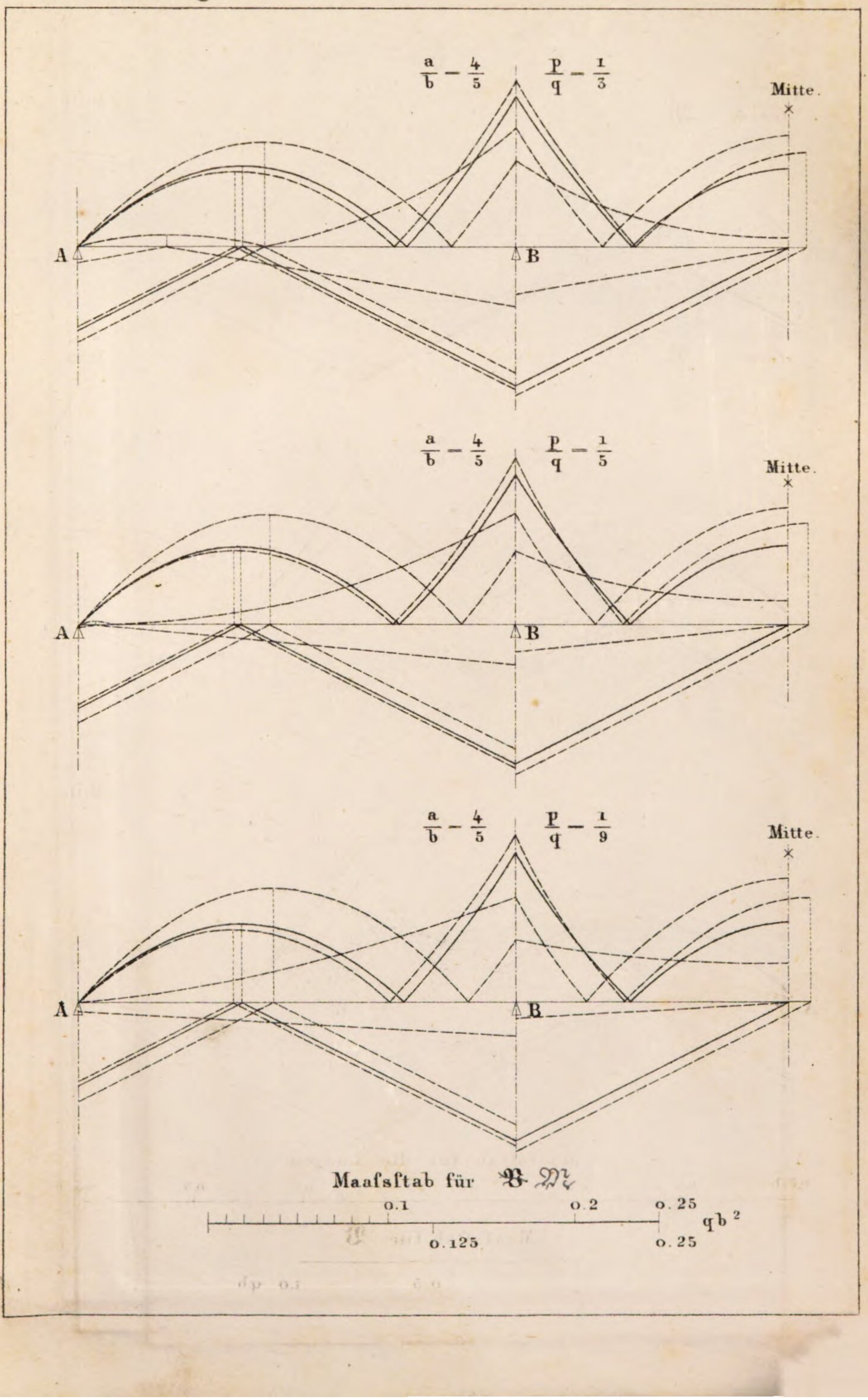

$\frac{p}{k} - 3$
$\frac{p}{q} - \frac{3}{4}$
Curven
𝔐
A
B
Curven
𝔙
$\frac{p}{k} = 2$
$\frac{p}{q} = \frac{2}{3}$
A
B
$\frac{p}{k} - 1$
$\frac{p}{q} - \frac{1}{2}$
A
B
Maafsftab für die Längen
0.1
0.3
0.5
1.0 b
Maafsftab für 𝔙
0.5
1.0 qb

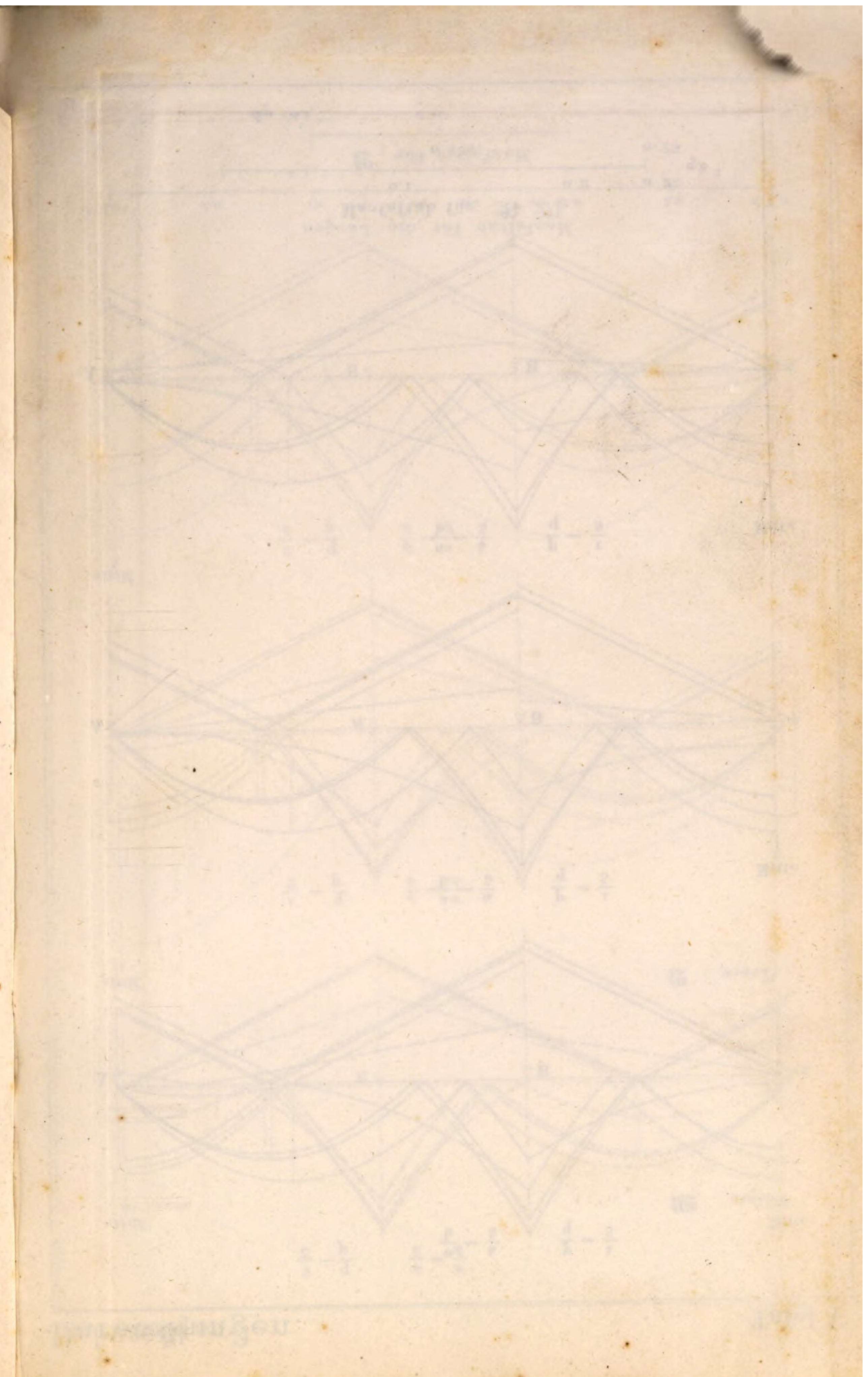


Lith.ie v. Friedr. Schepperlen. Stuttgart.



a/b – 4/5
p/q – 2/3
Mitte.
Curven M
A
B
Curven B
Mitte
a/b – 4/5
p/q – 1/2
A
B
a/b – 4/5
p/q – 2/5
Mitte.
A
B
Maafsftab für die Längen
0,8 b
0,6
0,4
0,2
0,1
0
0,1
0,3
0,5 b
Maafsftab für V
0.5
1.0 qb


a/b − 4/5
p/q − 1/3
Mitte.
A
B
a/b − 4/5
p/q − 1/5
Mitte.
A
B
a/b − 4/5
p/q − 1/9
Mitte.
A
B
Maafsftab für 𝔅 𝔐
0.1
0.2
0.25
qb²
0.125
0.25



Brücke von 15 m Spannweite.

Fig. a.

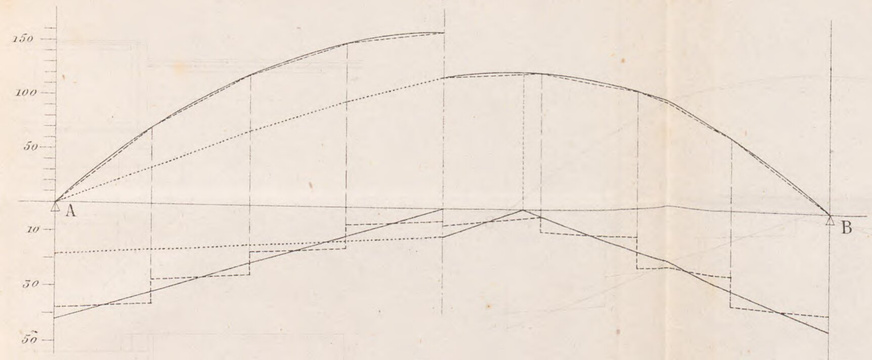


Fig. b.

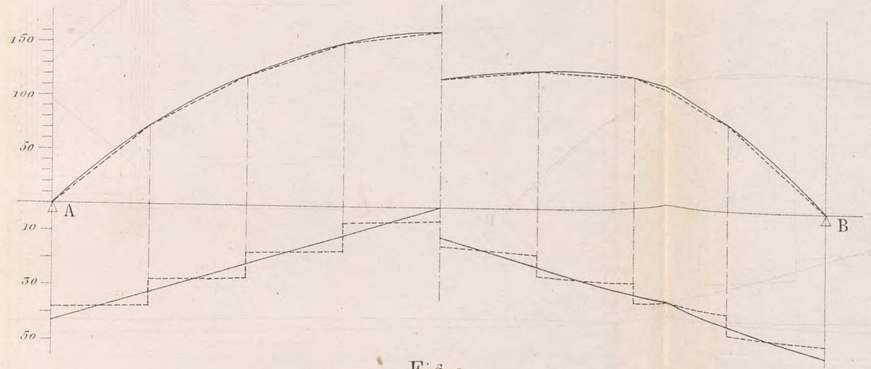
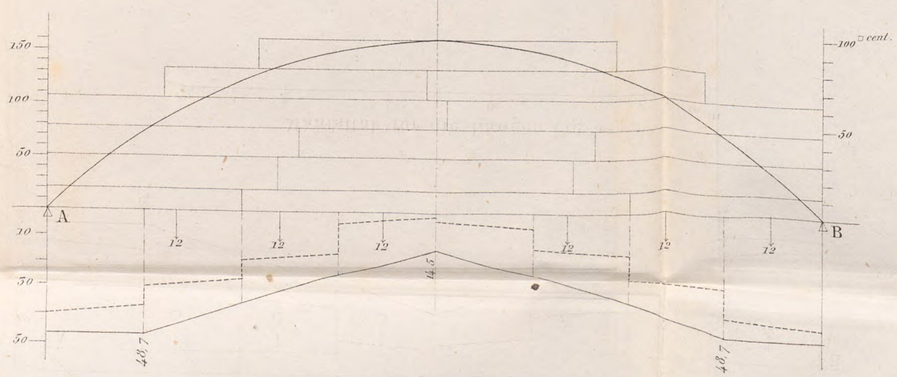
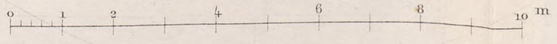


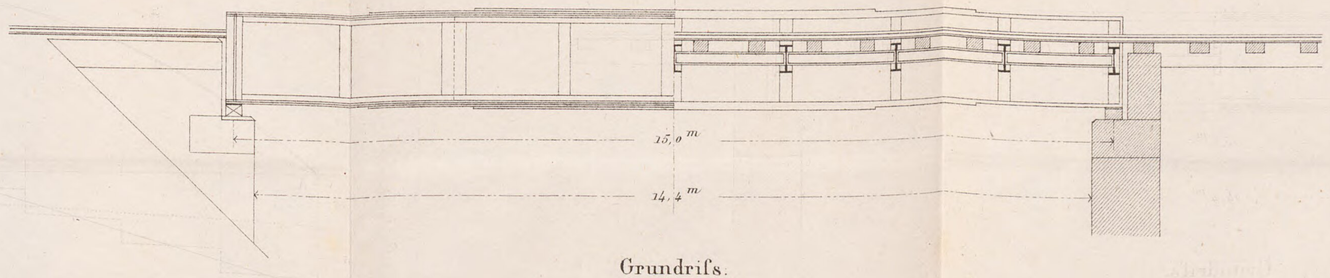
Fig. c.



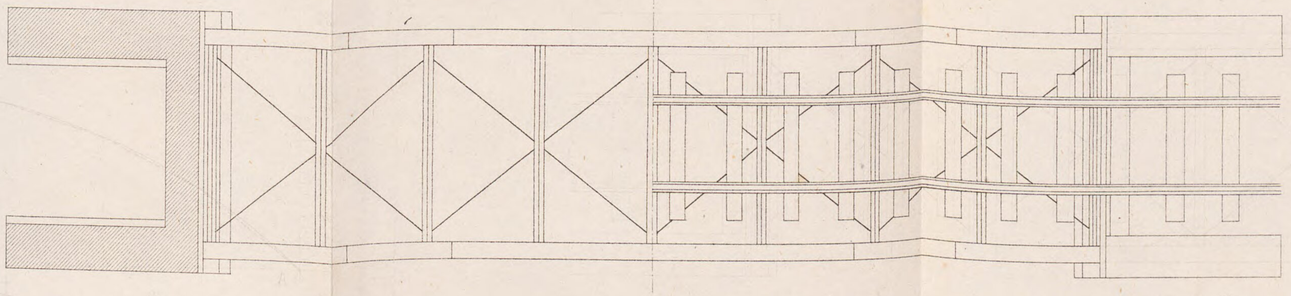
Maafsstab für die Längen Fig. a–c.



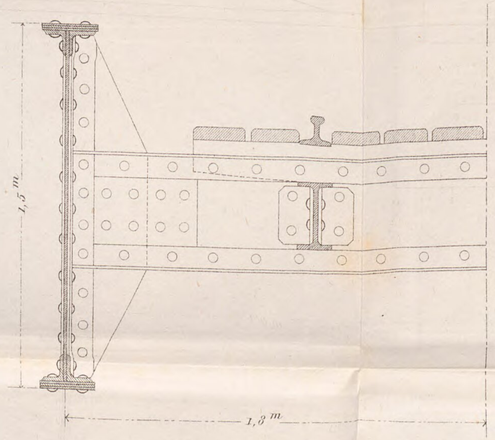
Ansicht und Längenschnitt.

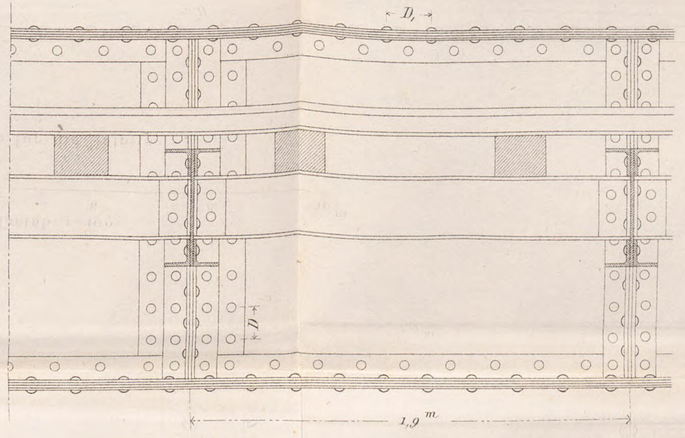


Grundrifs.

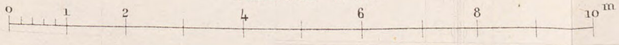


Details.

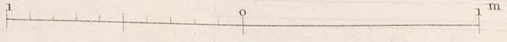




Maafsstab 1 = 100



Maafsstab für die Details



Lith.re d. Friedr. Schepperle in Stuttg.

Brücke von Langon.

Fig. 1. Halbe Längenansicht, mit der Vertheilung der Gurtungs- und Wandplatten.

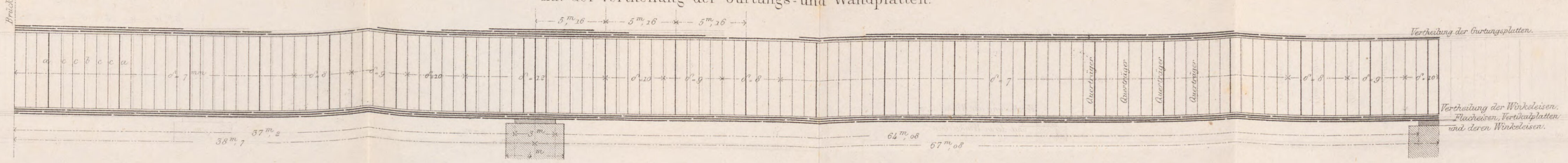


Fig. 2. Disposition der Vertikalversteifungen 1/150.

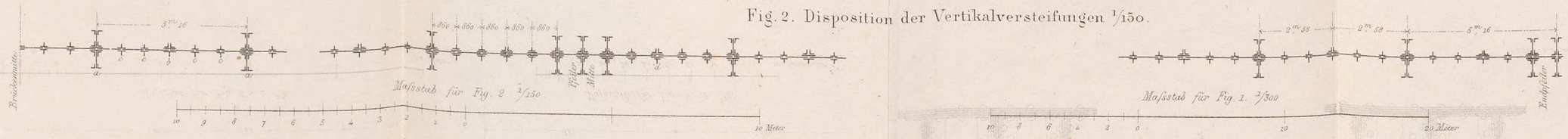


Fig. 3. Querschnitt der Brücke.

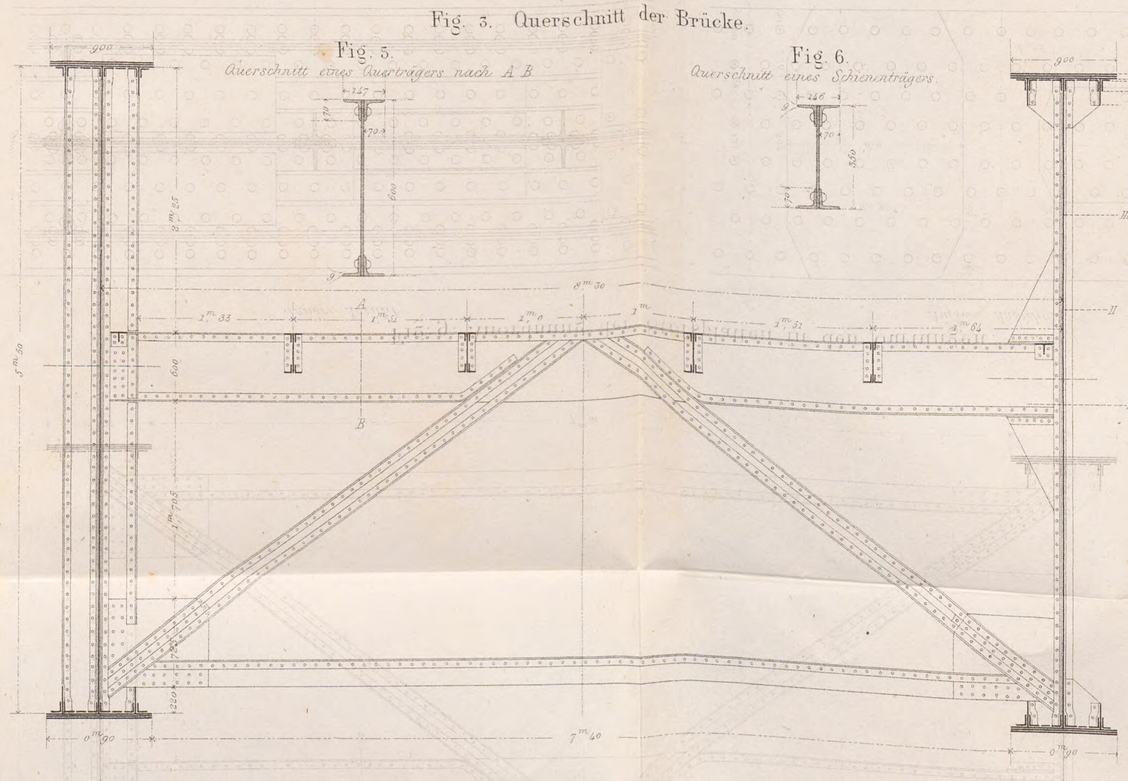
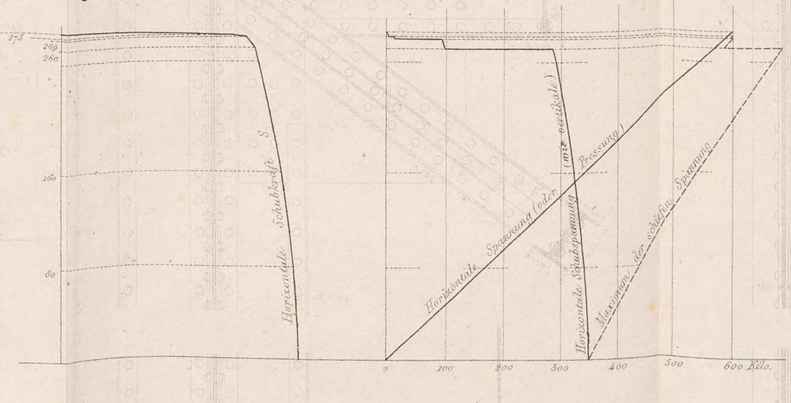
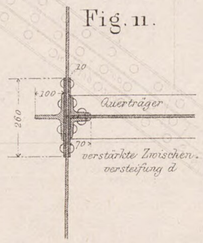
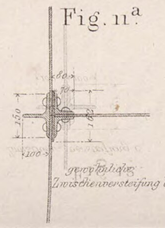
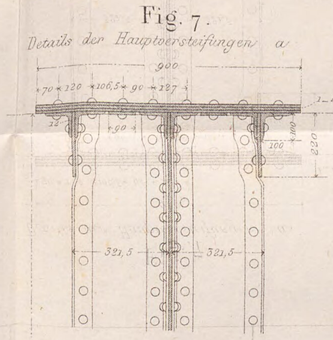


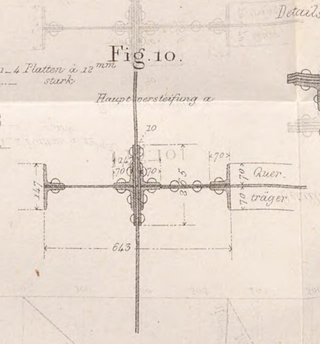
Fig. 4. Graphische Darstellung der Schubkräfte und Wandspannungen.

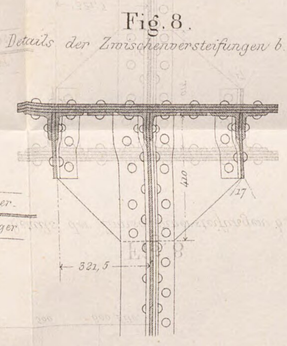












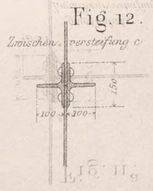
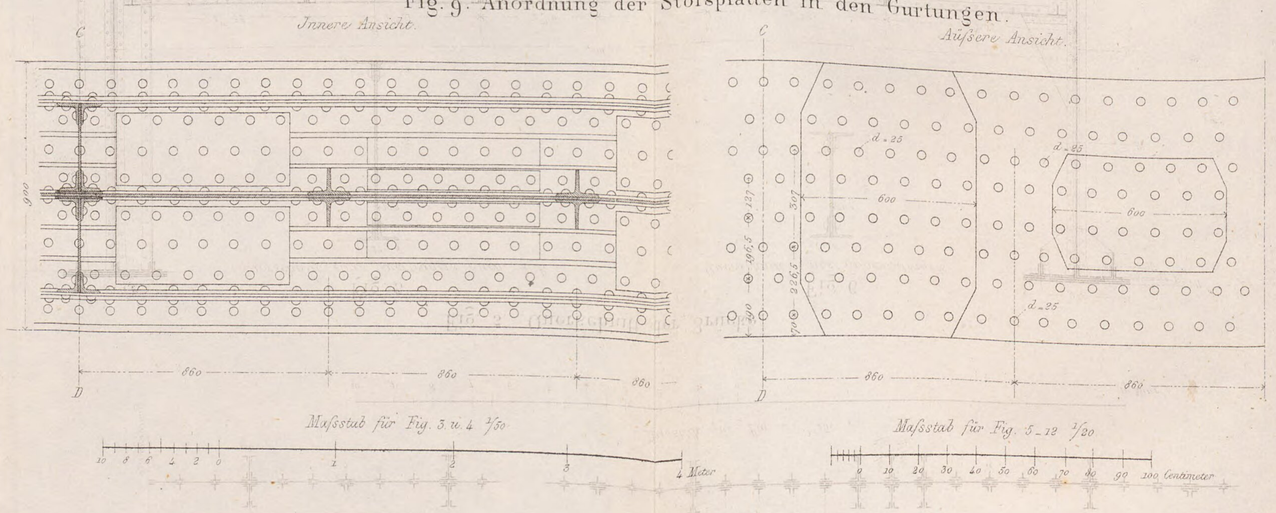


Fig. 9. Anordnung der Stoßplatten in den Gurtungen.



Lith. v. Friedr. Schepperlen i. Stuttgart.

Saue

7 Zufeln.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Laissle, Franz

Der Bau der Brückenträger mit wissenschaftlicher Begründung der gegebenen Regeln und mit besonderer Rücksicht auf die neuesten Ausführungen

Stuttgart 1864

A.hydr. 50 k
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10059898-5